E/150

i. 247.

Kgl. Bibliothek d. K. Gewerbe-
Schule Stuttgart

Grundzüge

der

darstellenden Geometrie

nebst einem Anhang,

enthaltend:

die Anwendung derselben auf Perspektive und Schlagschattenconstruktion.

Zum Selbststudium, sowie als Leitfaden beim Unterricht in Baugewerkeschulen Fortbildungsschulen, Oberrealschulen, höheren Bürgerschulen 2c.

herausgegeben

von

Professor **C. Rieß,**

Architekt, Hauptlehrer an der Kgl. Baugewerkeschule zu Stuttgart.

Mit 10 lithographirten Figuren-Tafeln.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1871.

n.V.

Bewährte Unterrichtsbücher

für

Lateinische, Real- und Polytechnische Schulen, Töchter-Institute, Bürger- und Fortbildungsschulen und den Privatunterricht.

In unserem Verlage sind erschienen und durch alle Buchhandlungen Deutschlands, der Oesterreichischen Monarchie, der Schweiz und des Auslands zu den beigesetzten Preisen zu erhalten:

Dienger, J., die **ebene Polygonometrie,** vollstdg dargest. u. d. zahlr. Beisp. erläut. Mit 32 Fig. gr. 8. 1854. 48 kr. 14 Sg.

Dienger, J., Handb. d. **ebenen u. sphär. Trigonometrie,** mit zahlr. Anwendgn derselben. M. 81 Fig. Dritte verb. Aufl. gr. 8. 1867. 3 fl. 36 kr. 2 Thlr. 4 Sg.

Dienger, J., die **Differential- u. Integralrechnung,** umfassend u. mit steter Berücksichtigg d. Anwendung dargestellt. In 3 Bänden. gr. 8.

I. u. II. Band m. 67 Figuren. Dritte verb. Aufl. 1868. 10 fl. 30 kr. od. 6 Thlr.

III. Band. (Auch mit dem Titel: Die Integration der partiellen Differentialgleichgn.) 1862. 2 fl. 36 kr. od. 1 Thl. 16 Sg.

Dienger, J., Theorie der **ellipt. Integrale u. Funktionen,** für d. Bedürfnisse d. Anwendg dargestellt. Zugl. als Zugabe zu dessen Differ. u. Integralrechn. gr. 8. 1865. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Dienger, J., Theorie und Auflösung der **höheren Gleichungen.** gr. 8. 1866. 1 fl. 24 kr. od. 24 Sg.

Dienger, J., Studien zur **analyt. Mechanik.** Die allgem. Gesetze der Bewegung. gr. 8. 1863. 1 fl. 12 kr. od. 20 Sg.

Paulus, Christoph, Zeichnende Geometrie zum Schulunterr. u. z. Privatstudium. gr. 8. Mit 12 Fig.-tafeln und 1 Musterblatt in Farbenton in Mappe. 4. 1866. 2 fl. 54 kr. od. 1 Thlr. 20 Sg.

Schwenk, Chr., Grundzüge der **darstellenden Geometrie** f. techn. Anstalten. Mit 151 Fig. gr. 8. 1857. 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

Spingler, J. C., Lehrb. d. **nied. u. höheren Arithmetik** mit besond. Rücksicht auf gewerbl. Rechnen. Für Realschl., Gymnas., Fortbildgssch., Lehrerseminare 2c. u. z. Privatstudium der Volksschullehrer. 2. A. gr. 8. 1867. 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Spingler, J. C., Aufgaben zu diesem Lehrb. 2. A. gr. 8. 1867. 48 kr. od. 14 Sg.

Spingler, J. C., Anleitg. zu e. bild. u. prakt. Rechenunterrichte für Volks-, Latein-, Real- u. Fortbildungsschulen, mit bes. Rücksicht auf Lehrerbildung. gr. 8. 1859/67. 1 fl. 30 kr. od. 25 Sg.

Spingler, J. C., Uebungsaufgaben für das schriftliche Rechnen in Volksschulen.

I. Abthlg. Aufgaben über die Lehre von den Ganzen. Zweite verb. Aufl. gr. 8. 1866. 12 kr. od. 4 Sg.

II. Abthlg. Aufgaben über die Lehre von den gemeinen Brüchen und deren Anwendung. Zweite verb. Aufl. gr. 8. 1867. 12 kr. od. 4 Sg.

III. Abthlg. Anwendung der Lehre von den Ganzen u. gemeinen Brüchen auf Verhältnißrechnungen, u. der Decimalbrüche auf Flächen- und Körperberechnungen. 2. verb. Aufl. gr. 8. 1867. 28 kr. od. 8 Sg.

Spingler, J. C., Methodisch geordnete **Rechenaufgaben** über die gemeinen und Decimalbrüche und deren Anwendung auf die verschiedenen Lebens- und Verkehrsverhältnisse mit Durchführung des Rechnens nach dem metrischen Maße und Gewichte. Für Mittel- und Oberklassen der Volksschulen, sowie für landwirthschaftliche und gewerbliche Fortbildungsschulen. 1870. 8. carton. 24 kr. od. 8 Sg.

— — **Resultate** und **Auflösungen** hiezu. Mit einem Anhang, das elementarische Ausziehen der Wurzeln enthaltend. 1870. 20 kr. od. 6 Sg.

Abel, C. L., Rechenb. f. Gewerbleute, m. Aufgaben aus d. berechnenden Geometrie, größtentheils d. Werkstätten d. Handwerker entnommen. M. Holzschn. Zweite verb. Aufl. gr. 8. 1860. 40 kr. od. 12 Sg. Griech. Uebrs. hiezu. Gh. 1 fl. 12 kr. od. 20 S.

Wagner, Karl, Handb. der **Naturkunde, Erdbeschreibung, Geschichte u. deutschen Sprachlehre,** f. Bürger-, Realschulen u. entsprechende Lehranstalten. Mit Holzschnitten. 21. verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1870. 1 fl. od. 18 Sg.

Büchele, C., u. A. Fischer, Samml g v. **geschäftl. Aufsätzen,** Briefen, Anzeigen, Meldungen, Berichten, Eingaben, Gelegenheitsschreiben 2c. für Gewerbe- u. Fortbildgsschulen, so wie z. Privatgebr. für Gewerbetreibende. Zweite völlig umgearb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1866. 40 kr. od. 12 Sg.

Wünsch, J. L., Uebungsaufgaben zur Ausarbeitg v. Geschäftsbriefen u. Geschäftsaufsätzen, für Fortbildungsschulen bearb. 8. 1865. 12 kr. od. 4 Sg.

Wünsch, J. L., Uebungsaufgaben zur Buchführung für Fortbildungsschulen. 8. 1867. 12 kr. od. 4 Sg.

Zl 1150
54.

A 229

Grundzüge

der

darstellenden Geometrie

nebst einem Anhang,

enthaltend:

die Anwendung derselben auf Perspektive und Schlagschattenconstruktion.

Zum Selbststudium, sowie als Leitfaden beim Unterricht in Baugewerkeschulen, Fortbildungsschulen, Oberrealschulen, höheren Bürgerschulen 2c.

herausgegeben

von

Professor **C. Rieß,**

Architekt, Hauptlehrer an der Kgl. Baugewerkeschule zu Stuttgart.

Mit 10 lithographirten Figuren-Tafeln.

0561 n.V.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1871.

035 303 220

Stadtbibliothek Passau

Inhalts-Verzeichniß.

	Seite
§. 1. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raum	1
§. 2. Verschiedene Projektionsarten	2
§. 3. Vom Grundsystem	2
§. 4. Von der Zeichnungsebene	3
§. 5 u. 6. Darstellung des **Punktes im Raum**	4
§. 7. Verschiedene Lagen des Punktes gegen die Grundebenen	6
§. 8—10. Darstellung der **Geraden im Raum**	6
§. 11. Verschiedene Lagen der Geraden	7
§. 12 u. 13. Von den Spuren	8
§. 14 u. 15. Darstellung der **Ebene**	9
§. 16 u. 17. Besondere Lagen von Ebenen gegen die Grundebene	10
§. 18. Lehrsätze über gerade Linien und Ebenen	11
§. 19—21. Uebungsaufgaben	12
§. 22 u. 23. Vom Umklappen	20
§. 24. Aufgaben	21
§. 25 u. 26. Bestimmung der Grundneigung einer Geraden	21
§. 27 u. 28. Aufgaben	22
§. 29 u. 30. Von den Hilfsebenen	29
§. 31—33. Polyedernetze	33
§. 34 u. 35. Schnitte der Polyeder durch Ebenen	35
§. 36—38. Schnitte der Polyeder unter sich	38
§. 39. Von den **krummen Linien, Curven**	42
§. 40. Bestimmung des Berührungspunktes von Tangenten	42
§. 41. Die Asymtote	43
§. 42. Besondere Curvenpunkte	43
§. 43. Rektification der Curven	43
§. 44. Evolvente und Evolute	44
§. 45 u. 46. Projektion ebener Curven	45
§. 47. Kreisprojektionen	46
§. 48. Uebungsaufgaben	48
§. 49 u. 50. Von den gewundenen Curven	49

Seite

§. 51. Von den **krummen Flächen** 49
§. 52 u. 53. Die Cylinderfläche 50
§. 54. Berührungsebenen an Cylinderflächen 51
§. 55. Schnitte von Ebenen und Linien mit Cylinderflächen 53
§. 56—58. Abwicklung der Cylinderflächen 54
§. 59 u. 60. Die Kegelfläche 57
§. 61. Berührungsebene an Kegelflächen 58
§. 62. Schnitte der Kegelflächen durch gerade Linien und Ebenen . . 59
§. 63 u. 64. Abwicklung der Kegelflächen 60
§. 65. Umdrehungsflächen 61
§. 66. Besondere Arten derselben 62
§. 67. Aufgaben 63
§. 68. Schnitte von Geraden und Ebenen mit Umdrehungsflächen . . 63
§. 69—71. Berührungsebenen an Umdrehungsflächen 66
§. 72. Regelflächen 68
§. 73. a) Windschiefe Flächen 68
§. 74. Die conoidische Fläche 69
§. 75—79. Schraubenflächen, die Schraubenlinie 70
§. 80 u. 81. Berührungsebene an die Schraubenflächen 73
§. 82. b) Entwickelbare Regelflächen 73
§. 83. Die Schraube mit 4eckigem Gewinde 74
§. 84. Deßgleichen mit 3eckigem Gewinde 74
§. 85. Deßgleichen mit beliebigem Gewindquerschnitt 75
§. 86—92. Schnitte krummer Flächen unter sich 75
§. 93. Allgemeine Lösung der Aufgabe: den Schnitt zweier beliebigen Flächen zu bestimmen 82
§. 94. Allgemeine Lösung der Aufgabe: den Schnittpunkt einer Geraden mit einer beliebigen Fläche zu finden 82
§. 95. Darstellung eines Körpers in verschiedenen Lagen gegen die Grundebene durch Drehung desselben 83

Anhang.

Anwendung der darstellenden Geometrie auf Perspektive.

§. 96. Parallelperspektive, isometrische Projektion 84
§. 97. Perspektive, Einleitung 85
§. 98. Erklärungen. Vom Fluchtpunkt 85
§. 99. Perspektive vermittelst der Distanzpunkte 86

Seite

§. 100. Von der Entfernung des Auges von der Tafel, Operation mit verkleinerter Distanz. Lage des Horizontes 88
§. 101. Methode der Fluchtpunkte 89
§. 102. Erklärungen 89
§. 103. Verschiedene Lagen von Fluchtpunkten 90
§. 104. Beispiel, Perspektive eines Postaments 91
§. 105. Bilder von ebenen Figuren, welche parallel zur Bildfläche sind 93
§. 106. Perspektive krummer Linien 94
§. 107. Perspektive krummer Flächen 94
§. 108. Ueber die Wahl des Standpunktes und die Stellung der Bildfläche 94
§. 109. Darstellung von Linien, deren Fluchtpunkte außerhalb des Zeichnungsblattes liegen 96

Anwendung der darstellenden Geometrie auf Schlagschattenconstruktion.

§. 110. Einleitung. Schlagschatten des Punktes 96
§. 111. Parallele Lichtstrahlen, Lage derselben gegen die Grundebenen . 97
§. 112. Erklärungen. Selbstschatten, Schattengrenze 98
§. 113. Allgemeine Lösung der Aufgabe: die Schattengrenze einer beliebigen Fläche oder eines Körpers zu bestimmen 99
Beispiel: Schlagschatten und Schattengrenze von Umdrehungsflächen 99
§. 114. Allgemeine Lösung der Aufgabe: den Schlagschatten eines Körpers auf einen zweiten Körper oder eine Fläche zu finden. Beispiel: Schatten einer Kugel auf eine Kugel 100
§. 115. Lehrsätze 101
§. 116. Beispiele 102

Vom Grundsystem.

§. 1.

Die darstellende Geometrie lehrt, wie man Punkte, Linien und Flächen im Raum, überhaupt Raumgebilde auf einer Ebene so darstellt, daß daraus ihre gegenseitige Lage, ihre Richtung und Größe vollkommen bestimmt werden kann.

Um z. B. die Lage eines Punktes im Raum zu fixiren, ist unter allen Umständen ein gewisses Grundsystem d. h. eine oder mehrere Ebenen, ein oder mehrere Punkte nothwendig, welche in festem und veränderlichem Zusammenhang zu einander stehen, und zu welchen jener Punkt in gewisse Beziehung gebracht ist. Nehmen wir etwa drei Punkte a, b, c (Fig. 1 Taf. I) als Grundsystem an, so wird die Lage eines beliebigen 4. Punktes d im Raume bestimmt sein, wenn man seine Entfernung von jedem der drei unter sich fest verbunden gedachten Punkte a, b, c kennt. Denn die Entfernungen des Punktes d von a, b und c bilden die Kanten einer Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck a b c ist, während der Punkt d ihre Spitze bildet; da aber nur eine einzige Pyramide möglich ist, die a b c zur Grundfläche und a d, b d, c d als Kanten hat, so folgt daraus, daß die Lage ihrer Spitze, d. h. die Lage des Punktes d vollkommen bestimmt ist.

Ebenso wäre die Lage eines Punktes im Raum auch dadurch festgestellt, daß man seine Entfernung von einer Ebene und zwei Punkten kennt u. s. f. Allein diese und ähnliche Darstellungsweisen sind meistentheils zu complicirt und daher für die praktische Anwendung nicht geeignet. Man wählt deßhalb gewöhnlich diejenige Art der Darstellung, welche unter dem Namen des Projicirens bekannt ist.

§. 2.

Die Ebene MN (Fig. 2, Taf. I) und der außerhalb derselben liegende Punkt C bilde das Grundsystem. Zieht man von C aus nach einem Punkt A im Raum eine Gerade CA und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt a mit der Ebene MN, so ist die Lage des Punktes A vollkommen bestimmt durch den Punkt a und die Entfernung AC. Ebenso ist die Lage des Punktes B bestimmt durch den Punkt b, in welchem die Verlängerung von BC die Ebene MN schneidet, und durch die Entfernung des Punktes B von C.

Die Ebene MN nennt man die Projektions-Ebene, den Punkt C das Projektions-Centrum, und die Geraden Ca, Cb die Projektionsstrahlen, die Punkte a und b die Projektionen von A und B, und die Art der Darstellung Centralprojektion.

Der Unterschied der Richtungen aC und bC wird um so kleiner, d. h. die Geraden aC und bC nähern sich um so mehr dem Parallelismus, je weiter der Punkt C von der Ebene MN sich entfernt; aC und bC werden wirklich parallel, wenn man sich den Punkt C in unendlicher Entfernung denkt. Die Centralprojektion wird alsdann zur Parallelprojektion. Ist die Richtung der Projektionsstrahlen rechtwinklig zur Ebene MN, so entsteht die Orthogonalprojektion; bei dieser Art der Darstellung ist die Lage eines Punktes A im Raum (Fig. 3, Taf. I) bestimmt, durch die Länge und den Fußpunkt a des vom Punkt A auf die Projektions-Ebene gefällten Perpendikels.

§. 3.

Die Orthogonalprojektion nun ist es, welche in der Praxis hauptsächlich zur Darstellung von Raumgebilden zur Anwendung kommt, weil sich vermittelst derselben sehr einfach und leicht Flächen und Körper, deren Form und Größe bekannt ist, darstellen lassen, und weil andererseits auf diese Weise dargestellte Körper sich auch ebenso leicht räumlich ausführen lassen.

Man bedient sich dabei als Grundsystem zweier senkrecht auf einander stehender Ebenen, der Grundebenen, von denen die

eine abcd (Fig. 4, Taf. I) vertikal, die zweite efgh horizontal (also beide senkrecht auf einander stehend) gedacht werden.

Die Ebene abcd heißt Vertikalebene oder Aufriß-tafel (A.T.), die Ebene efgh Horizontalebene oder Grundrißtafel (G.T.), die Schnittlinie ik beider Ebenen heißt Axe oder Grundschnitt.

Der Grundschnitt theilt jede Grundebene in zwei Theile, nämlich

in die vordere G.T. iefk,
" " hintere G.T. ihgk,
" " obere A.T. idck,
und die untere A.T. iabk.

Denkt man sich die Grundebenen ins Unendliche erweitert, so theilen sie den unendlichen Raum in 4 Theile und man nennt denjenigen Raumtheil, welcher zwischen der vorderen G.T. und der oberen A.T. liegt den ersten Raum I (Fig. 4); zwischen der oberen A.T. und der hinteren G.T. liegt der zweite Raum II; zwischen der hinteren G.T. und der unteren A.T. der dritte Raum III, und zwischen der unteren A.T. und der vorderen G.T. der vierte Raum IV. Es liegt also

der 1. Raum vorn oben,
" 2. " hinten oben,
" 3. " hinten unten,
" 4. " vorn unten.

§. 4.

Da man beim Zeichnen nicht wohl in zwei auf einander senkrecht stehenden Ebenen operiren kann, da vielmehr die Zeichnungsfläche, d. h. unsere Tafel, Reisbrett oder dergleichen nur eine Ebene bildet, so denke man sich die G.T. (Fig. 5, Taf. I) um den Grundschnitt ik als Drehungsaxe in der Richtung der Pfeile so lange gedreht, bis ihr vorderer Theil mit der unteren Aufrißtafel und der hintere Theil derselben mit der oberen Aufrißtafel zusammenfällt (wie Fig. 6, Taf. I zeigt); nun sind beide Grundebenen in einer Ebene, der Zeichnungsebene, vereinigt, auf der sich alle nöthigen Zeichenoperationen ausführen lassen.

Ziehen wir daher auf unserer Tafel, auf unserem Reißbrett oder dergl. eine horizontale Linie a b, so können wir diese stets als den Grundschnitt, die Fläche a N über demselben als obere A. T. und hintere G.T., die Fläche b M unter demselben als die vordere G.T. und untere A.T. betrachten.

Darstellung des Punktes.

§. 5.

Fällt man von einem Punkt P im Raum (Fig. 7, Taf. I) eine Senkrechte P p auf die G.T., so ist der Fußpunkt p'' jener Senkrechten die Horizontalprojektion oder der Grundriß des Punktes P; fällt man ebenso auf die A.T. vom Punkt P eine Senkrechte P p', so ist p' die Vertikalprojektion oder der Aufriß des Punktes P. Die Senkrechten P p'' und P p' heißen Reißlote.

Legt man durch die Reißlote eine Ebene, so steht diese senkrecht auf dem Grundschnitt i k (denn sie steht senkrecht auf beiden Grundebenen) und schneidet daher die Grundebenen in den auf dem Grundschnitt senkrecht stehenden Linien o p' und o p''. Bei der im vorigen Paragraph besprochenen Drehung der G.T. zum Zweck der Vereinigung beider Grundebenen zur Zeichnungsebene beschreibt der Punkt p'' den Kreisbogen p'' p und die Gerade o p'' nimmt nach der Drehung die Lage o p ein. Da nun aber o p und o p' in o senkrecht auf dem Grundschnitt i k stehet, so fallen dieselben in eine zum Grundschnitt senkrechte Gerade p p' zusammen.

Daraus folgt, daß, wenn zwei Punkte p und p' (Fig. 8, Taf. I) die Projektionen eines Punktes sein sollen, die geradlinige Verbindungslinie p p' senkrecht auf dem Grundschnitt stehen muß.

In dem Rechteck P p' o p Fig. 7 ist p' o = P p'' und o p'' = p' P, d. h. die Entfernung des Aufrisses p' vom Grundschnitt ist gleich der Entfernung des Punktes P von der G.T., d. h. gleich seiner Horizontaldistanz; die Entfernung des Punktes p'' vom Grundschnitt ist gleich der Entfernung des Punktes P von der A.T., d. h. gleich seiner Vertikaldistanz.

Sind daher p und p' (Fig. 8) die Risse eines Punktes P im Raume, so können wir uns dessen Lage leicht vergegenwärtigen, wenn wir uns im Punkt p auf der Ebene des Papieres eine Senkrechte errichtet denken, deren Länge gleich op' ist; der Endpunkt dieser Senkrechten ist der Punkt P.

Bemerkung. Es ist beim Studium der darstellenden Geometrie durchaus nothwendig, daß man sich gleich von Anfang an daran gewöhne, die beiden Grundebenen, respektive die beiden durch den Grundschnitt geschiedenen Theile der Zeichnungsebene stets senkrecht auf einander stehend sich zu denken, weil man nur so eine klare Anschauung und einen richtigen Begriff von Grund- und Aufriß erhält.

§. 6.

Fällt man von dem im zweiten Raum liegenden Punkt Q (Fig. 7) auf die Grundebenen die Reißlote Qq' und Qq'', so ist q' der Aufriß und q'' der Grundriß des Punktes Q. Bei der Drehung der G.T. im wiederholt angedeuteten Sinn beschreibt der Punkt q'' den Kreisbogen q''q und die Gerade o''q'' nimmt nach der Drehung die Lage o''q ein, d. h. fällt mit o''q' zusammen.

Sind daher zwei auf einer zum Grundschnitt senkrechten Geraden liegenden Punkte q und q' (Fig. 8) die Risse eines Punktes Q im Raum, so muß derselbe im zweiten Raume liegen. Um nun aber dieselben als Grund- und Aufriß zu unterscheiden bezeichnen wir hier wie künftighin immer, den Grundriß eines Punktes stets mit einem einfachen Buchstaben des kleinen Alphabetes, den Aufriß mit demselben Buchstaben mit einem Accent (Strich), während der Punkt im Raum mit demselben Buchstaben des großen Alphabets bezeichnet werden soll. Wir schreiben daher Q oder (q, q') und wollen damit sagen, daß q der Grundriß und q' der Aufriß eines Punktes Q im Raum sei.

Sind r und r' (Fig. 8) die Risse eines Punktes R, so liegt letzterer offenbar im dritten Raum; denn da der Punkt r, also der Grundriß, über dem Grundschnitt liegt, so kann dieser Riß nur auf der hinteren G.T. liegen, während r' als Aufriß auf der unteren A.T. liegt.

Der Punkt (t, t′) endlich kann nur im vierten Raum liegen, denn sein Aufriß t′ liegt auf der unteren A.T., sein Grundriß t auf der vorderen G.T.

§. 7.

1) Liegt ein Punkt in der G.T., so fällt er mit seinem Grundriß zusammen; sein Aufriß liegt im Grundschnitt, denn seine Horizontaldistanz ist Null.

2) Liegt ein Punkt in der A.T., so fällt er mit seinem Aufriß zusammen; sein Grundriß liegt im Grundschnitt, denn seine Vertikaldistanz ist Null.

3) Liegt ein Punkt im Grundschnitt, so fällt er mit seinem Grund- und Aufriß zusammen, denn seine Vertikaldistanz sowohl als seine Horizontaldistanz ist Null.

Darstellung der geraden Linie.

§. 8.

Die von beliebigen Punkten A, B, C, D, E.. (Fig. 9, Taf. I) einer Geraden MN auf die G.T. gefällten Reißlote ergeben die Grundrisse a, b, c, d, e dieser Punkte; die Reißlote Aa, Bb, Cc, Dd, Ee aber liegen offenbar alle in einer Ebene AaeE, welche Reißebene heißt, die Fußpunkte der Reißlote in der Schnittlinie dieser Ebene mit der G.T. also in einer Geraden mn. Ebenso müssen auch die Fußpunkte der von A, B, C, D, E auf die A.T. gefällten Reißlote Aa′, Bb′, Cc′ . . . in einer Geraden m′n′ liegen. Die Gerade mn ist der Grundriß, m′n′ der Aufriß der Geraden MN im Raum. Grund- und Aufriß einer Geraden sind — als Schnitt der Reiß-Ebenen mit den Grundebenen gerade Linien. Sind daher (a, a′) und (b, b′) die Risse zweier Punkte A und B im Raum, so ist die Gerade ab der Grundriß und a′b′ der Aufriß der Geraden AB im Raum.

Die Ebene AaeE (Fig. 9, Taf. I) heißt die horizontalprojicirende, die Ebene Aa′e′E die vertikalprojicirende Ebene der Geraden AE, erstere steht senkrecht auf der G.T., die letztere senkrecht auf der A.T.

§. 9.

Zwei in den Grundebenen beliebig gezogene gerade Linien m n und m' n' (Fig. 9, Taf. I) können stets als Grund- und Aufriß einer Geraden M N im Raum betrachtet werden, da die durch m n und m' n' gehenden Reiß-Ebenen sich unter allen Umständen schneiden müssen; die Schnittlinie der beiden Reißebenen aber ist die durch die Risse m n und m' n' bestimmte Gerade.

§. 10.

Bezeichnet man die Grundrisse von Geraden stets mit Buchstaben des kleinen Alphabets, die Aufrisse mit denselben Buchstaben und einem Accent (Strich), so kann über die Lage der durch ihre Risse in Fig. 10, Taf. I dargestellten Linien kein Zweifel sein, wobei nur noch zu bemerken, daß man die auf den verdeckten Theilen der Grundebene (hintere G.T. und untere A.T.) liegenden Risse in der Zeichnung zu punktiren pflegt. Es liegt nämlich die Gerade M N (Fig. 10, Taf. I) im ersten, P Q im zweiten, U V im dritten, X Y im vierten Raum.

§. 11.

1) Ist eine Gerade M N (Fig. 11, Taf. I) parallel zur G.T., so ist ihr Aufriß parallell zum Grundschnitt; denn alle Punkte der Geraden haben gleiche Horizontaldistanz.

2) Ist eine Gerade P Q (Fig. 12, Taf. I) parallel zur A.T., so ist ihr Grundriß parallel zum Grundschnitt; denn alle Punkte der Geraden haben gleiche Vertikaldistanz.

3) Ist eine Gerade R S (Fig. 13, Taf. I) parallel zum Grundschnitt, so sind auch ihre beiden Risse parallel zum Grundschnitt. Da alle Punkte der Geraden sowohl gleiche Vertikal- als Horizontaldistanz haben.

4) Ist eine Gerade (t, t' t'', Fig. 14, Taf. I) senkrecht zur G.T., so ist ihr Grundriß ein Punkt, ihr Aufriß steht senkrecht auf dem Grundschnitt.

5) Ist eine Gerade (u v, u', Fig. 15, Taf. I) senkrecht zur

A.T., so ist ihr Aufriß ein Punkt, ihr Grundriß steht senkrecht auf dem Grundschnitt.

6) Geht eine Gerade V W (Fig. 16, Taf. I) durch einen Punkt des Grundschnitts, so gehen ihre Risse durch denselben Punkt des Grundschnitts (§. 7, Nro. 3).

7) Liegt eine Gerade X Y (Fig. 17, Taf. I) in einer zum Grundschnitt senkrechten Geraden.

§. 12.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Grundebenen heißen Spuren. Jede gegen die Grundebenen beliebig geneigte Gerade hat zwei Spuren, nämlich eine Grundrißspur, d. i. derjenige Punkt, in welchem sie die G.T. schneidet, und eine Aufrißspur, d. i. derjenige Punkt, in welchem sie die A.T. schneidet. Ist eine Gerade parallel zu einer der Grundebenen, so hat sie nur eine Spur, und zwar in derjenigen Grundebene, mit welcher sie nicht parallel ist. Ist eine Gerade parallel zum Grundschnitt, also zu beiden Grundebenen, so hat sie gar keine Spur.

Da die Spuren einer Linie Punkte sind, welche in den Grundebenen liegen, so ist der jeder Spur zugehörige andere Riß im Grundschnitt zu suchen. (§. 7, Nro. 1 u. 2.)

Sind daher m n und m' n' (Fig. 18, Taf. I) die Risse einer Geraden, so ist derjenige Punkt s auf m n die Grundrißspur der Linie M N, dessen Aufriß s' im Grundschnitt liegt; dasselbe ist der Fall mit der Aufrißspur t'. Um daher die Spuren einer Geraden (m n, m' n') zu finden, verlängere man den Aufriß m' n' bis zum Durchschnitt s' mit dem Grundschnitt und ziehe durch s' eine Senkrechte zum Grundschnitt, so ist der Schnittpunkt s die Grundrißspur. Verlängert man m n und errichtet im Punkt t, in welchen m n den Grundschnitt trifft eine Senkrechte auf letzterem, so ist t' die Aufrißspur der Geraden M N.

§. 13.

Durch ihre beiden Spuren s und t' ist die Lage einer Geraden gegen die Grundebene ebenso vollkommen bestimmt, wie durch

die Risse von zwei beliebigen andern auf der Geraden liegenden Punkten (s. §. 8.)

Um aus den Spuren s und t' einer Geraden (Fig. 19, Taf. I) ihre Risse zu finden, fälle man von s und t' Lote auf den Grundschnitt und verbinde t mit s, und s' mit t'; st ist sodann der Grundriß, s't' der Aufriß der Geraden.

Darstellung der Ebene.

§. 14.

Es ist selbstverständlich, daß man eine Ebene nicht in der Weise wie Punkte und Linien, d. h. mit Hilfe von Reißloten auf die Grundebenen projiciren kann, denn man würde dadurch immer nur die Grundebenen selbst wieder erhalten. Dagegen ist die Lage einer Ebene bestimmt 1) durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade oder 2) durch drei Punkte oder 3) durch diejenigen Linien, in welchen eine Ebene die Grundebenen schneidet (diese aber sind nichts anderes als zwei in der Ebene liegende Gerade; Nro. 3 ist daher nur als besonderer Fall von Nro. 1 zu betrachten.

§. 15.

Die Ebene abcd (Fig. 20, Taf. I) schneidet die G.T. in der Geraden OP, die A.T. in der Geraden OP'; OP heißt die Grundrißspur, OP' die Aufrißspur der Ebene. Daß Grund- und Aufrißspur in einem Punkte O des Grundschnittes sich schneiden müssen, zeigt ein Blick auf die Figur.

Zwei in einem Punkt O des Grundschnittes (Fig. 21, Taf. I) sich schneidende Gerade OP und OP' können daher stets als die Spuren einer Ebene angesehen werden.

Bemerkung. Man hat sich wohl zu hüten, die zwischen den Linien OP und OP' (Fig. 21, Taf. I) liegende Winkelfläche POP' als die wahre Größe des zwischen OP und OP' liegenden Ebenenstückes anzusehen. Man wird nur dann die richtige Vorstellung von diesem Ebenenstück erhalten, wenn man sich die Grundebenen in ihrer richtigen gegenseitigen Lage, d. h. senkrecht auf

einander stehend denkt. Zieht man z. B. auf einem Blatt Papier eine Gerade als Grundschnitt und von einem auf diesem liegenden Punkt O aus zwei Gerade OP und OP′ und faltet das Papier nach der Linie des Grundschnittes so, daß beide Papierflächen senkrecht auf einander stehen, so ist die Ebene, welche jetzt durch OP und OP′ gelegt werden kann, diejenige, welche durch die beiden Spuren dargestellt werden soll; es ist ferner leicht einzusehen, daß der Winkel POP′ ein anderer werden muß, wenn man das Papier wieder in eine Ebene (d. h. in die Zeichnungsebene) ausbreitet. Im allgemeinen ist der Winkel POP′ (Fig. 21, Taf. I) größer als derjenige, welchen das Ebenenstück POP′ (Fig. 20, Taf. I) in Wirklichkeit hat.

§. 16.

Je nach der Lage, welche eine Ebene gegen die Grundebene einnimmt, haben auch deren Spuren bestimmte Lage und Richtung gegen den Grundschnitt.

1) Ist eine Ebene parallel zur G.T., so hat sie nur eine Aufrißspur, und diese ist parallel zum Grundschnitt (Fig. 22, Taf. I).

2) Ist eine Ebene parallel zur A.T., so hat sie nur eine Grundrißspur, und diese ist parallel zum Grundschnitt (Fig. 23, Taf. I).

3) Ist eine Ebene parallel zum Grundschnitt, so sind beide Spuren parallel zum Grundschnitt (Fig. 24, Taf. I).

4) Ist eine Ebene senkrecht zur G.T. so ist ihre Aufrißspur senkrecht zum Grundschnitt (Fig. 25, Taf. I).

5) Ist eine Ebene senkrecht zur A.T., so ist ihre Grundrißspur senkrecht zum Grundschnitt (Fig. 26, Taf. I).

6) Ist eine Ebene senkrecht zu beiden Grundebenen, so sind beide Spuren senkrecht zum Grundschnitt (Fig. 27, Taf. I).

7) Geht eine Ebene durch den Grundschnitt, so fallen beide Spuren mit dem Grundschnitt zusammen (Fig. 28, Taf. I), ihre Lage ist unbestimmt.

§. 17.

Wenn man die in den nicht sichtbaren Theilen der Grundebenen liegenden Spuren einer Ebene punktirt, so wird es nicht schwer sein, zu entscheiden, in welchen der 4 Räume jedesmal das zwischen den in (Fig. 29, Taf. I) durch seine Spuren gegebene Ebenenstück liegt.

Im allgemeinen geht indeß jede Ebene, welche die Grundebenen schräg schneidet, durch alle 4 Räume. Es liegt z. B. das Ebenenstück P O P′ (Fig. 30, Taf. I) im ersten, P′ O P″ im zweiten, P″ O P‴ im dritten, P‴ O P im vierten Raum.

Lehrsätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 18.

1) Liegt eine Gerade in einer Ebene (Fig. 31 u. 31 a, Taf. I), so liegen die Spuren s und s′ der Geraden in den gleichnamigen Spuren der Ebene; oder

liegen die Spuren einer Geraden in den gleichnamigen Spuren einer Ebene, so liegt die Gerade selbst in der Ebene.

2) Sind zwei Ebenen parallel, so sind auch ihre gleichnamigen Spuren parallel (Fig. 32, Taf. I), oder

sind die gleichnamigen Spuren zweier Ebenen parallel, so sind auch die beiden Ebenen parallel.

Sind zwei Ebenen mit dem Grundschnitt parallel, so können sie zwar auch unter sich parallel sein, sie können sich aber auch in einer zum Grundschnitt parallelen Geraden schneiden.

3) Sind zwei Gerade M N und P Q im Raum parallel, so sind auch ihre gleichnamigen Risse parallel (Fig. 33, Taf. I). Denn die entsprechenden Reißebenen sind parallel, folglich sind es auch deren Spuren, d. h. die Risse der Geraden.

4) Ist eine begrenzte Gerade parallel mit einer der beiden Grundebenen, so hat ihr Riß auf der betreffenden Grundebene gleiche Länge mit ihr. Denn die Gerade und ihr Riß in der mit ihr parallelen Grundebene sind die beiden parallelen Seiten eines Recht-

ecks, dessen beide andere parallelen Seiten die Reißlote der Endpunkte der Geraden sind.

5) Ist eine begrenzte Gerade nach einem bestimmten Verhältniß getheilt, so sind auch ihre Risse in demselben Verhältniß getheilt. Liegt daher z. B. ein Punkt C (Fig. 34, Taf. I) in der Mitte einer Geraden AB, so liegt auch c auf der Mitte von ab und c' auf der Mitte von a'b'.

6) Zwei Gerade MN und PQ (Fig. 35, Taf. I) deren Risse sich in a und a' schneiden, schneiden sich in Wirklichkeit (im Raum) nur dann, wenn die geradlinige Verbindung von a mit a' senkrecht auf dem Grundschnitt steht; denn nur unter dieser Bedingung sind a und a' die Risse eines und desselben Punktes A, nämlich des Schnittpunktes der Linien MN und PQ.

7) Eine Gerade MN (Fig. 36, Taf. I) steht senkrecht auf einer Ebene POP', wenn ihre Risse senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene stehen. Denn die G.Spur OP steht senkrecht auf der horizontalprojicirenden Ebene der Geraden, also senkrecht auf deren Spur mn; ebenso steht die Aufrißspur senkrecht auf der vertikalprojicirenden Ebene der Geraden, also senkrecht auf deren Spur m'n'.

§. 19.

Uebungsaufgaben.

1) Durch einen Punkt A eine Gerade zu legen, welche mit einer gegebenen Geraden MN parallel ist.

Man ziehe durch die Risse des Punktes A Parallelen mit den gleichnamigen Rissen der Geraden (§. 18. 3).

2) Von einer Ebene ist eine Spur OP und ein Punkt T der zweiten Spur gegeben, man soll diese zweite Spur finden.

a) Man verbinde den Punkt O (Fig. 37, Taf. I), in welchem OP den Grundschnitt trifft, mit T, so ist OP' die gesuchte zweite Spur (s. §. 15).

b) Ist die Spur OP (Fig. 38, Taf. I) parallel zum Grundschnitt, so ist auch die durch T gehende Spur O'P' parallel zum Grundschnitt (s. §. 16a).

c) Fällt der Schnittpunkt von OP mit dem Grundschnitt (Fig. 39, Taf. I) über den Bereich des Zeichnungsblattes hinaus, so zeichne man ein beliebiges Dreieck Tab, dessen eine Ecke in T und dessen beide andere Ecken in der Spur OP und in dem Grundschnitt liegen, ziehe cd || ab, ce || aT und de || bT, und verbinde den Punkt e mit T, so ist O'P' die gesuchte Spur.

3) Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch eine gegebene Gerade MN beliebig geht.

a) Verbinde einen beliebigen Punkt des Grundschnitts mit den Spuren der Geraden MN (§. 18 und 18. 1).

b) Ist die Gerade MN parallel zur G.T. (Fig. 40, Taf. I), so geht die Aufrißspur OP' der Ebene durch die Aufrißspur s' der Linie; die Grundrißspur OP ist parallel zum Grundriß mn. Denn jede Ebene, welche durch die mit der G.T. parallele Linie MN geht, schneidet die G.T. in einer zu MN parallelen Linie.

c) Ist die Gerade (mn, m'n', Fig. 41, Taf. I) parallel zum Grundschnitt, so lege man durch einen Punkt (a, a') derselben eine beliebige Gerade, und ziehe durch deren Spuren s und s' die Spuren OP und OP' der Ebene parallel zum Grundschnitt.

4) Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt A beliebig geht.

Lege durch den Punkt A eine beliebige Gerade und durch diese nach Nro. 3 eine Ebene.

5) Eine Linie zu zeichnen, welche in einer Ebene beliebig liegt.

Man nehme in der G.Spur und in der A.Spur der Ebene je einen Punkt beliebig an, betrachte diese beiden Punkte als G.- und A.Spur einer Geraden und zeichne die Risse derselben nach §. 13.

6) Die Risse eines Punktes zu zeichnen, welcher in einer Ebene POP' beliebig liegt.

a) Zeichne eine Linie, welche in der Ebene POP' liegt und nimm auf ihr einen beliebigen Punkt an.

b) Ist die Ebene POP′ senkrecht zur G.T., so liegt der Grundriß jedes in ihr liegenden Punktes in der Grundrißspur OP, denn die horizontalprojicirenden Lote derselben liegen alle in der Ebene.

c) Ist die Ebene POP′ senkrecht zum Grundschnitt, so liegen die Risse aller in ihr liegenden Punkte in den gleichnamigen Spuren der Ebene.

7) Durch einen gegebenen Punkt (a, a′) eine Gerade zu ziehen, welche mit einer gegebenen Ebene POP′ parallel ist.

Ziehe in der Ebene POP′ eine beliebige Gerade und durch den Punkt (a, a′) eine Parallele mit ihr (s. §. 18 Nro. 1 und 3).

Da die G.=Spur OP der Ebene POP′ (Fig. 42, Taf. I) eine in ihr liegende Gerade ist, deren Aufriß im Grundschnitt liegt, so ziehe man durch a eine Parallele mit OP und durch a′ eine Parallele mit dem Grundschnitt; die so durch (a, a′) gehende Gerade ist parallel zur Ebene POP′, da sie mit der Spur OP parallel ist.

8) Die Horizontal= und Vertikaldistanz m und n eines Punktes sind gegeben, man soll die Risse des Punktes finden, vorausgesetzt, daß derselbe im ersten Raum liegt.

Mache oa′ (Fig. 43, Taf. I) = m und oa = n (s. §. 5).

Zusatz. Wie findet man die Risse des Punktes, wenn derselbe im zweiten, dritten oder im vierten Raum liegen soll?

9) Eine Ebene POP′, und der G.Riß a eines in ihr liegenden Punktes ist gegeben, man soll den Aufriß desselben bestimmen.

Ziehe durch a den Grundriß einer Geraden, welche in POP′ beliebig liegt, und zeichne den Aufriß dazu; auf ihr liegt der Aufriß des Punktes.

10) Die Schnittlinie zweier Ebenen POP′ und QO′Q′ zu zeichnen.

Da die Schnittlinie eine beiden Ebenen gemeinschaftliche Linie ist, so muß der Schnittpunkt s der beiden Grundriß=

spuren OP und O'Q (Fig. 44, Taf. II) die Grundrißspur, und der Schnittpunkt s' der beiden Aufrißspuren OP' und O'Q' die Aufrißspur der Schnittlinie sein.

b) Sind zwei gleichnamige Spuren der Ebenen (Fig. 45, Taf. II) parallel, so ist der gleichnamige Riß der Schnittlinie mit diesen parallel, ihr zweiter Riß ist parallel zum Grundschnitt.

c) Ist eine der beiden Ebenen, z. B. O'Q', parallel zur G.T. (Fig. 46 a, Taf. II), so ist der G.Riß der Schnittlinie parallel zur G.Spur der zweiten Ebene.

d) Sind beide Ebenen parallel zum G.Schnitt, so schneide man dieselben durch eine beliebige Dritte zu den Grundebenen, schräge Ebene (Fig. 46 b, Taf. II), zeichne deren Schnittlinien mit den gegebenen Ebenen, und ziehe durch den Schnittpunkt (a, a') beider Schnittlinien die Risse der Linie parallel zum Grundschnitt.

11) Den Schnittpunkt einer Geraden (mn, m'n') mit einer Ebene POP' zu finden.

a) Lege durch die Gerade (mn, m'n') eine beliebige Ebene, und suche deren Schnittlinie mit der gegebenen Ebene; derjenige Punkt, in welchem diese Schnittlinie die gegebene Linie (mn, m'n') trifft, ist der gesuchte Schnittpunkt der Geraden MN mit der Ebene POP'.

b) Die Lösung der Aufgabe wird wesentlich vereinfacht, wenn man statt einer beliebigen Hilfsebene eine der beiden Reißebenen der Geraden MN, z. B. die Reißebene mn (Fig. 47, Taf. II) nimmt.

12) Die Spuren einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Punkte A, B, C geht.

a) Verbinde den Punkt (a, a') (Fig. 48, Taf. II) mit (b, b') durch eine Gerade, desgleichen (a, a') mit (c, c'), suche die Spuren dieser beiden Geraden, und verbinde die gleichnamigen Spuren je durch eine Gerade ss und s's', so sind dies die Spuren der gesuchten Ebene.

b) Ziehe die Gerade (ab, a'b') und durch (c, c') eine Pa=

rallele mit ihr, und lege durch diese beiden Linien eine Ebene, so ist dies die gewünschte.

Zeichnungsprobe: die beiden Spuren müssen sich in einem Punkt des Grundschnittes treffen.

13) Durch einen Punkt (a, a') eine Linie parallel zu einer gegebenen Ebene POP' zu legen.

Zeichne eine gerade Linie in der Ebene POP' (§. 18) und ziehe durch (a, a') eine Parallele mit derselben.

14) Durch einen Punkt (a, a') eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene POP' parallel ist.

a) Zeichne die Risse zweier Linien, welche in der Ebene POP' beliebig liegen (§. 18), ziehe durch die Risse a, a' des gegebenen Punktes Parallelen mit jenen Rissen und verbinde deren gleichnamige Spuren mit einander, so sind dies die Spuren der gesuchten Ebene.

Zeichnungsprobe. Diese Spuren müssen mit den Spuren OP und OP' parallel sein.

b) Einfachere Lösung. Man lege durch (a, a') (Fig. 49, Taf. II) eine Gerade (as, a's') parallel zur G.Spur OP der gegebenen Ebene, ziehe durch die A.Spur s' dieser Geraden eine Parallele zu OP' und durch O' eine Parallele zu OP.

15) Durch eine Gerade MN eine Ebene zu legen, welche mit einer zweiten Geraden PQ parallel ist.

Ziehe durch einen beliebigen Punkt der Geraden MN eine Parallele zu PQ und lege durch beide eine Ebene, so ist dies die gesuchte.

16) Durch einen Punkt A eine Gerade parallel zu zwei gegebenen Ebenen POP' und QOQ' zu ziehen.

Lege durch A eine Gerade parallel zur Schnittlinie der gegebenen Ebenen, so ist dies die gesuchte.

17) Durch einen Punkt A eine Ebene parallel zu zwei Geraden MN und PQ zu legen.

Ziehe durch A eine Parallele zu MN und zu PQ und lege durch sie eine Ebene.

§. 20.

Fortsetzung.

1) Von einem Punkt (a, a') auf eine gegebene Ebene POP' eine Senkrechte zu fällen.

Die beiden Senkrechten, welche man von den Rissen des Punktes aus auf die gleichnamigen Spuren der Ebene ziehen kann sind die Risse der verlangten Senkrechten.

2) Durch einen Punkt (a, a') eine Ebene zu legen, welche senkrecht auf der Geraden (m n, m' n') steht (Fig. 50, Taf. II).

Zeichne die Spuren einer beliebigen auf (m n, m' n') senkrechten Ebene TOT' und lege durch a a' eine Ebene parallel zu TOT' (s. Nro. 14, §. 19), so ist diese die gesuchte.

Die Hilfsebene TOT' kann man entbehren, wenn man eine Gerade durch (a, a') so zieht, daß sie parallel zur G.Spur jener Ebene, also ihr Grundriß senkrecht auf m n, ihr Aufriß parallel zum Grundschnitt ist.

3) Von einem Punkt A auf eine Gerade MN ein Lot zu fällen.

Lege durch A eine Ebene senkrecht zu MN, suche den Schnittpunkt von MN mit dieser Ebene und verbinde ihn mit dem Punkt A.

4) Durch eine gegebene Gerade MN eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene POP' senkrecht steht.

Man nehme auf MN einen beliebigen Punkt A an, ziehe durch ihn eine Senkrechte zu POP' und lege durch diese Senkrechte und durch MN eine Ebene, so ist dies die gesuchte.

§. 21.

Fortsetzung.

1) Eine Ebene ist durch zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade MN und PQ gegeben, ferner ist gegeben der Grundriß einer dritten Geraden, welche in der Ebene der beiden ersten liegt, man soll den Aufriß dazu zeichnen.

Bestimme die Aufrisse zu denjenigen Punkten, in welchen der Grundriß der dritten Geraden die Grundrisse von MN und PQ schneidet und verbinde sie durch eine Gerade, so ist dies der verlangte Aufriß.

2) Den Schnittpunkt einer Geraden CD mit einer Ebene zu finden, welche durch zwei sich schneidende Gerade MN und PQ gegeben ist. (Fig. 51, Taf. II.)

Man könnte etwa durch CD eine Ebene beliebig legen, die Schnittpunkte von MN und PQ mit ihr suchen und diese beiden Schnittpunkte mit einander verbinden; derjenige Punkt, in welchem diese Verbindungslinie von CD geschnitten wird, ist der gesuchte Punkt.

Anstatt durch CD eine beliebige Ebene zu legen, wählt man besser eine der Reißebenen, z. B. die Reißebene cd; diese schneidet mn und pq in a und b, im Aufriß in a' und b'; die Gerade a'b' schneidet c'd' in g', dessen Grundriß auf cd in g liegt; (g, g') ist der gesuchte Schnittpunkt. Denn (cd, c'd') und (ab, a'b') liegen in derselben Ebene, (ab, a'b') aber auch zugleich in der durch MN und PQ gehenden Ebene.

3) Zu untersuchen ob 4 gegebene Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen oder nicht.

a) Verbinde A mit B, C und D und suche die Spuren der drei Verbindungslinien AB, AC, AD; liegen die A.Spuren und ebenso die G.Spuren je in einer Geraden, so liegen die 4 Punkte in einer Ebene.

b) Verbinde je zwei dieser Punkte durch eine gerade Linie AB und CD, zeichne die Spuren dieser Geraden und verbinde die gleichnamigen durch gerade Linien, schneiden sich diese in ihrer Verlängerung in einem Punkt des Grundschnitts, so liegen die 4 Punkte in einer Ebene.

c) Zeichne die beiden Diagonalen des Vierecks ABCD; Grund- und Aufriß des Schnittpunktes derselben müssen in einer zum Grundschnitt senkrechten Geraden liegen, wenn die 4 Punkte in einer Ebene liegen sollen.

4) Der Grundriß eines ebenen Polygons und der Aufriß von zwei Seiten desselben ist gegeben; man soll den Aufriß des Polygons zeichnen.

5) Auf die Ebene des Dreiecks (a b c, a' b' c') (Fig. 52, Taf. II) vom Punkt (p, p') ein Lot zu fällen.

Schneidet man eine Ebene durch eine zweite, welche mit einer der beiden Grundebenen parallel ist, so ist die so erhaltene Schnittlinie parallel zur betreffenden Spur. Da aber die Risse der zu einer Ebene senkrechten Geraden senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene stehen, so stehen sie auch senkrecht auf den damit parallelen Schnittlinien.

Die zur A.T. parallele Ebene a d schneidet, im A.Riß das Dreieck in a' d', folglich ist die zu a' d' senkrechte Gerade p, q der A.Riß der gesuchten Lotlinie.

Die zur G.T. parallele Ebene a' e' schneidet die Dreiecksebene im Grundriß in a e, folglich ist der Grundriß des Lotes die zu a e senkrechte p q; denn a e und a' d' sind Linien parallel zu den Spuren der Dreiecksebene.

6) Auf gleiche Weise, d. h. mit Anwendung von Hilfsebenen parallel zu den Grundebenen läßt auch die Aufgabe §. 19, Nro. 12 eine sehr einfache Lösung zu.

Denn sind die 3 Ecken des Dreiecks A B C (Fig. 52, Taf. II) die Punkte, durch welche eine Ebene gelegt werden soll, so hat man nur die Grund- und Aufrißspur einer der Seiten des Dreiecks, z. B. von (a b, a' b') zu bestimmen, und durch die G.Spur s eine Gerade O P ‖ a e und durch die A.Spur s' eine Gerade O P' ‖ a' d' zu ziehen.

7) Von einem gegebenen Punkt (p, p') aus ein Polygon A B C
a) auf die G.T. zu projiciren (Fig. 53, Taf. II) (Centralprojection;
b) desgl. auf die A.T.;
c) desgl. auf eine durch ihre Spuren beliebig gegebenen Ebene.

Verbinde (p, p') geradlinig mit (a, a'), (b, b'), (c, c') und suche ad a) die Grundrißspuren, ad b) die Aufrißspuren, ad c) die Schnittpunkte mit der gegebenen Ebene.

8) a) Ein gegebenes Polygon auf die G.T. zu projiciren, wenn die Projektionsstrahlen parallel zu einer gegebenen Geraden (m n, m' n') sind (Parallelprojektion);

b) desgl. auf die A.T.;

c) desgl. auf eine durch ihre Spuren beliebig gegebene Ebene.

§. 22.

Eine Ebene **umklappen** heißt: dieselbe um ihre Spur als Axe so lange drehen, bis sie mit derjenigen Grundebene zusammenfällt, in welcher jene Spur liegt. Man wird demzufolge eine Ebene um die G.Spur stets in die G.T., um ihre A.Spur in die A.T. umzuklappen haben.

Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt der Ebene einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Spur (d. h. auf der Drehungsaxe) steht, und dessen Halbmesser gleich der Entfernung des Punktes von dieser Spur ist. Die in der Drehungsaxe liegenden Punkte verändern bei dieser Drehung ihre Lage nicht.

Unter der Umklappung eines Punktes oder einer Geraden versteht man diejenige Lage des Punktes oder der Geraden, welche sie einnehmen, nachdem man sie mit der Ebene, in welcher sie liegen, in die eine oder andere der Grundebenen umgeklappt hat.

§. 23.

Wird eine begrenzte Gerade oder eine Ebenenfigur (Polygon, Kreis 2c.) in eine der Grundebenen umgeklappt, oder wenigstens so gedreht, daß sie eine zu der einen oder anderen der Grundebenen parallele Lage einnimmt, so zeigt sie sich in ihrer wahren Größe und Gestalt.

Bei der Bestimmung der wahren Länge begrenzter Geraden, oder der wahren Größe und Gestalt von Ebenenfiguren wird man immer Drehungen oder Umklappungen vorzunehmen haben.

§. 24.

Aufgaben.

1) Die wahre Länge desjenigen Stückes einer Geraden (m n, m' n') zu bestimmen, welches durch die beiden Spuren s und s' begrenzt ist (Fig. 54, Taf. II).

Dreht man die horizontalprojicirende Ebene d. h. die Reißebene s y s' um die A.Spur s' y, so bleibt s' y unbeweglich, jeder Punkt.der Spur s y beschreibt einen Kreisbogen in der Gr.T., so der Punkt s den Bogen s s'''; ist s in s''', d. h. im Grundschnitt angekommen, so hat die Ebene s y s' ihre Drehung in die A.T. vollendet; s y nimmt die Lage s''' y ein und das Dreieck s' s''' y ist die Umklappung des Dreiecks s' s y, also s' s''' die wahre Länge der Geraden.

Legt man die horizontalprojicirende Ebene s y s' um die Spur s y in die G.T. um, so bleibt s y unbeweglich, s' y aber steht senkrecht auf s y, bleibt also auch nach der Drehung noch senkrecht darauf, und nimmt dann die Lage y s'' ein; s y s'' ist demnach die Umklappung des Dreiecks s y s' und s s'' die Umklappung des zwischen den Spuren s und s' liegenden Linienstückes, also die wahre Länge desselben.

§. 25.

Um den Neigungswinkel einer Geraden L gegen eine Ebene E zu erhalten, legt man bekanntlich eine Ebene F durch die Gerade L, welche auf E zugleich senkrecht steht; derjenige Winkel welchen die Gerade L mit der Schnittlinie der Ebenen E und F einschließt, ist der Neigungswinkel der Geraden L gegen die Ebene E.

Nun geht aber die Reißebene s y s' (Fig. 54, Taf. II) durch M N, und ist zugleich senkrecht auf der G.T., entspricht also der obengenannten Ebene F, folglich ist der Winkel α der Neigungswinkel der Geraden M N gegen die G.T.

§. 26.

Ganz analog den in §. 24 und 25 besprochenen Umklappungen der horizontalprojizirenden Ebene, kann auch die Reißebene s x s' sowohl um ihre G.Spur in die G.T. als auch um ihre A.Spur in die A.T. umgeklappt werden. Man findet dadurch selbstverständlich wieder die wahre Größe der Linie M N und zugleich ihre Neigung gegen die A.T.

§. 27.

Uebungsaufgaben.

1) Die wahre Länge der begrenzten Geraden (a b, a' b') zu finden (Fig. 55, Taf. II).

a) Die in der Reißebene a b liegenden Reißlote stehen senkrecht auf a b und behalten auch nach erfolgter Umklappung der Reißebene a b in die G.T. diese Richtung bei. Macht man daher a a'' senkrecht auf a b und gleich d a', b b'' senkrecht auf a b und gleich c b', so ist a b b'' a'' die Umklappung der genannten Reißebene in die G.T., also a'' b'' die wahre Größe der Geraden AB.

b) Denkt man sich in a und b (Fig. 55, Taf. II) auf der G.T. die beiden Reißlote errichtet, deren Längen gleich d a' und c b' sind, so bilden sie mit a b und der Geraden A B im Raum ein Paralleltrapez. Drehen wir dieses um das Reißlot bei b, bis es die zur A.T. parallele Lage b a''' einnimmt, so projicirt es sich in dieser Lage auf die A.T. in seiner wahren Gestalt, das Reißlot b b' ändert seine Lage nicht, während das Reißlot bei a (d a') nach a''', im A.Riß nach $e\,a^{IV}$ gekommen ist; $e\,c\,b'\,a^{IV}$ ist demnach die wahre Größe jenes Paralleltrapezes und $a^{IV}\,b'$ die wahre Größe von A B.

2) In der zur A.T. senkrechten Ebene P O P' (Fig. 55ª, Taf. II) liegt ein Punkt A; man soll die Lage dieses Punktes angeben, nachdem die Ebene um die Spur O P in die G.T. umgeklappt ist.

Jeder Punkt der Ebene POP′ beschreibt bei dieser Drehung einen Kreis, dessen Radius senkrecht auf OP steht, und dessen Länge gleich der Entfernung des betreffenden A.Risses von O ist. Zieht man daher durch a eine zu OP senkrechte Gerade mn und macht da‴ = Oa′, so ist a‴ die Lage des Punktes nach der Umklappung der Ebene und zwar wenn die Ebene POP′ nach links gedreht wird. Legt man die Ebene POP′ nach rechts um, so hat man $da^{IV} = da'$ zu machen und erhält in a^{V} die Lage des umgeklappten Punktes A.

3) Die G.Spur OP einer Ebene, und Grund- und Aufriß a und a′ eines in ihr liegenden Punktes sind gegeben, man soll die Lage des Punktes angeben, nachdem die Ebene um die Spur OP in die G.T. umgeklappt ist. (Fig. 56, Taf. II.)

Bei der Umklappung bewegt sich der Punkt A in einem Kreis, dessen Ebene at senkrecht auf OP steht. Denkt man sich den Punkt b, in welchem die Ebene at die Spur OP schneidet, mit dem Punkt A im Raum geradlinig verbunden, so ist diese Verbindungslinie Ab der Drehungsradius; sie ist zugleich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks Aba, dessen eine Kathete die Gerade ab und dessen andere Kathete die Horizontaldistanz Aa = a′c ist. Dieses Dreieck kann man sich aber leicht verschaffen, wenn man es sich in die G.T. um ab umgeklappt denkt, d. h. wenn man aa″ senkrecht auf ab und gleich a′c macht und a″b zieht. Die Hypotenuse a″b des Dreiecks aba″ ist der Radius des Kreises, welchen der Punkt A bei seiner Drehung um OP beschreibt. Da die Umklappung des Punktes A in der Geraden at liegen muß und seine Entfernung von b gleich ba″ ist, so hat man nur ba‴ = ba″ zu machen; a‴ ist sodann die gewünschte Umklappung.

4) Den Neigungswinkel einer Ebene POP′ gegen die G.T. zu bestimmen (Fig. 57, Taf. II).

Der Neigungswinkel liegt in einer zur G.T. und zur gegebenen Ebene, also zur G.Spur OP senkrechten Ebene

t a a'; diese schneidet die G.T. in a b und die Ebene POP' in einer Geraden, welche b mit a' verbindet. Die Geraden b a und b a' schließen mit a a' ein bei b rechtwinkliges Dreieck a b a' ein, dessen Katheten a b und a a' sind und dessen Winkel bei b der gesuchte Neigungswinkel ist. Klappt man das Dreieck a b a' um a a' in die A.T. um, so beschreibt der Punkt b der Kathete a b den Kreisbogen b b'' und a b nimmt nach der Umklappung die Lage a b'' ein; a b'' a' ist demnach die wahre Größe jenes Dreiecks a b a' und α der gesuchte Neigungswinkel.

5) Die Grundrißspur O P einer Ebene, ihre G.Neigung α und ein Punkt a''' in der Umklappung der Ebene um O P ist gegeben; man soll die Risse des Punktes zeichnen, nachdem die Ebene in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht ist (Fig. 56, Taf. II). (Umkehrung der Aufgabe Nro. 3.)

Der Punkt a''' bewegt sich bei der Drehung in einem Kreis, dessen Ebene senkrecht auf OP steht, also in derjenigen Ebene, deren Spur t a ist; der Halbmesser des Kreises ist b a''', sein Mittelpunkt in b. Nach vollendeter Drehung nimmt die Linie b a''' eine solche Lage ein, daß der Winkel, welchen sie gegen die G.T., resp. gegen b a macht, gleich dem gegebenen Neigungswinkel α ist. Denkt man sich die Drehung vollendet, also die Linie b a''' in ihrer ursprünglichen Lage b A, so schließt b A mit a b und dem Reißlot A a ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen Winkel bei b gleich α ist. Dieses Dreieck läßt sich in seiner Umklappung um a b in die G.T. darstellen, wenn man $\measuredangle$ a b a'' $= \alpha$, b a'' $=$ b a''' und a'' a senkrecht auf a b macht. Der Punkt a ist sodann der Grundriß, und, wenn man a a' senkrecht zum Grundschnitt und a' c $=$ a a'' macht, a' der Aufriß des fraglichen Punktes.

6) Die Umklappung a'' b'' c'' d'' e'' f'' eines Sechsecks, die Spur O P der Ebenen, in welcher dasselbe liegt und um welche die Umklappung erfolgt ist, und die Neigung α der Ebenen gegen die G.T. sind gegeben, man soll Grund- und Aufriß des Sechsecks

zeichnen nachdem die Ebene in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht ist (Fig. 58, Taf. II).

Man wende für jeden einzelnen Punkt a'', b'', c'' .... das in der vorhergehenden Aufgabe beschriebene Verfahren an und verbinde die so gefundenen Grund- und Aufrisse der Eckpunkte entsprechend durch gerade Linien mit einander.

Da jede zu OP senkrechte Ebene a'' a, b'' b, c'' c die Ebene in einer Geraden schneidet, welche mit der G.T. den Winkel α macht, so läßt sich das Verfahren in der Weise vereinfachen, daß man ts senkrecht zu OP zieht und $\measuredangle$ snm gleich α macht. Zieht man nun z. B. c'' c''' senkrecht zu ts, beschreibt mit nc''' einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt c^{IV} mit nm, zieht c^{IV}c senkrecht zu ns und c'' c senkrecht zu OP, so ist der Schnittpunkt c der Grundriß des Punktes C; der Aufriß c' liegt so hoch über dem Grundschnitt, als c^{IV} über ns liegt u. s. f.

7) In einer Ebene POP' liegt eine Gerade (mn, m'n'), man soll die Lage dieser Linie angeben nachdem sie mit der Ebene um die Spur OP in die G.T. umgeklappt ist (Fig. 59, Taf. II).

a) Man zeichne die Umklappung irgend zweier Punkte der Geraden (mn, m'n') und verbinde dieselben durch eine Gerade, so ist dies die verlangte Lage der Linie MN nach der Umklappung.

b) Anstatt jene Punkte beliebig zu wählen, nehme man die beiden Spuren s und s' der Geraden MN. Die G.Spur s liegt in der Drehungsaxe, ändert also ihre Lage nicht; die Umklappung der A.Spur s' aber fällt in die durch t senkrecht zu OP gezogene Gerade tq und kommt nach s'', wenn man as'' = der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks s'at, d. h. = s'a'' macht. Die Gerade ss'' ist demnach die gewünschte Umklappung der Geraden MN.

8) Den Winkel zu bestimmen, welchen die beiden Spuren OP und OP' einer Ebene mit einander einschließen (Fig. 59, Taf. II).

a) Die Gerade welche die beiden Punkte s und s' mit einander verbindet schließt mit Os und Os' ein Dreieck ein, dessen

Umklappung um Os man sich unmittelbar verschaffen kann, wnn man nach Nro. 6 die Umklappung s'' des Punktes s' zeichnet und s'' mit O und s verbindet. Der Winkel s O s'' ist sodann derjenige, welchen die beiden Spuren OP und OP'' mit einander einschließen.

b) Noch einfacher wird die Lösung, wenn man auf OP' einen beliebigen Punkt s' annimmt, s' t senkrecht zum Grundschnitt und t q senkrecht zu OP zieht. Beschreibt man nun mit Os' aus o einen Kreis bis zum Durchschnitt s'' mit t q und verbindet s'' mit O, so ist P O s'' der gesuchte Winkel, denn es ist q t s' eine zu OP senkrechte Ebene, schneidet also die Ebene POP' in einer zu OP senkrechten Geraden, die nach der Umklappung die Lage a q einnimmt, sie bildet die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete Oa und dessen Hypotenuse Os' ist; O a s'' ist die Umklappung dieses Dreiecks und β der gesuchte Winkel.

9) Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden MN und PQ zu bestimmen.

a) Lege durch die beiden Geraden eine Ebene, und klappe diese mit den Geraden um die G. oder A.Spur in die G. oder A.T. um (s. Nro. 7).

b) Die zur G.T. parallele Ebene O'P' (Fig. 60, Taf. III) schneidet die Geraden in (c, c') und (b, b'); betrachtet man nun die zur G.T. parallele Gerade c b als Drehungsaxe und klappt das Dreieck (b a c, b' a' c') in die Ebene O'P' um, so beschreibt der Punkt a einen Kreisbogen in der zu OP senkrechten Ebene a d, der Halbmesser des Bogens ist gleich der wahren Länge von (a d, a' d'), d. h. gleich d a'''. Macht man daher $d a^{IV} = d a'''$ und verbindet c und b mit a^{IV}, so ist $b a^{IV} c$ der gesuchte Winkel.

Dieses Verfahren ist namentlich dann empfehlenswerth, wann die Spuren der gegebenen Geraden über den Bereich des Zeichnungsblattes hinausfallen.

10) Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Ebenen P O P'

und Q O′ Q′ zu finden (d. i. den Neigungswinkel zweier Ebenen zu bestimmen).

a) Zeichne die Schnittlinie L der Ebenen und sodann eine Ebene E, welche auf L senkrecht steht; bestimme die Linien M und N, in welchen die Ebene E die gegebenen Ebenen schneidet, und durch Umklappung den Winkel, welchen die Geraden M und N mit einander machen; dieser Winkel ist der Gesuchte.

b) Ziehe durch einen beliebig zu wählenden Punkt zwei Gerade, welche auf P O P′ und Q O′ Q′ senkrecht stehen und bestimme den Winkel α zwischen diesen beiden Geraden; derjenige Winkel, welcher den Winkel α zu 180° ergänzt, ist der gesuchte.

11) Die Entfernung zweier paralleler Geraden MN und PQ zu finden.

a) Schneide die Geraden durch eine Ebene, welche auf ihnen senkrecht steht, suche die Schnittpunkte derselben mit der Ebene, verbinde diese Schnittpunkte durch eine Gerade und suche die wahre Länge der letztern.

b) Lege durch die Geraden MN und PQ eine Ebene und klappe sie in die eine der beiden Grundebenen um, so ergibt sich hier unmittelbar die Entfernung.

12) Die Entfernung zweier parallelen Ebenen zu bestimmen.

a) Zeichne ein Gerade, welche auf den gegebenen Ebenen senkrecht steht, bestimme die Schnittpunkte der Geraden mit den Ebenen und suche die wahre Entfernung der Schnittpunkte.

b) Schneidet man die gegebenen Ebenen P O P′ und Q O Q′ (Fig. 61, Taf. III) durch eine auf deren Grundrißspuren senkrecht stehende Ebene R O″ P′, so sind die dadurch erzeugten Schnittlinien parallel und zwar in einem Abstand gleich dem der beiden Ebenen. Klappt man die Ebenen R O″ P′ in die A.T. um, so erhält man als Schnitt mit P O P′ in der Umklappung die Gerade P′ m und als Schnitt mit Q O′ Q′ die mit P′ m parallele Gerade Q′ n. Der

Abstand der Geraden P′m von Q′n ist gleich dem der Ebenen P O P′ und Q O′ Q′.

13) Die Entfernung eines Punktes A von einer Ebene E zu finden.

a) Fälle von A eine Senkrechte L auf die Ebene E, suche den Durchschnittspunkt B von L mit E, und bestimme die wahre Größe der Entfernung A B.

b) Lege durch A eine Ebene F senkrecht zur Ebene E, suche die Linie L, in welcher E und F sich schneiden und klappe die Ebene F mit L und A in eine der Grundebenen um.

14) Die Entfernung eines Punktes A von einer Geraden L zu bestimmen.

Lege durch L und A eine Ebene und klappe diese mit L und A in die G. oder A.T. um.

15) Die Neigung einer Geraden M N gegen eine Ebene E zu bestimmen.

a) Lege durch M N eine Ebene senkrecht zu E, suche deren Schnittlinie mit E und bestimme den Winkel zwischen dieser Schnittlinie und der Geraden M N.

b) Fälle von einem beliebigen Punkt der Geraden M N ein Lot auf die Ebene E und bestimme den Winkel α, welchen M N und dieses Lot mit einander machen; der gesuchte Winkel ist derjenige, welcher den Winkel α zu 90° ergänzt.

§. 28.

Fortsetzung.

1) G. und A.Riß eines ebenen Polygons und eines in dessen Ebene liegenden Punktes A sind gegeben; es soll G. und A.Riß einer Pyramide gezeichnet werden, deren Grundfläche jenes Polygon ist, während die Spitze der Pyramide in der Entfernung = m n senkrecht über A liegt.

2) G. und A.Riß der Grundfläche eines Prismas sind gegeben; man soll letzteres zeichnen, wenn die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen und eine Länge gleich m n haben.

3) Eine Ebene zu zeichnen, welche mit einer gegebenen Ebene in einem gegebenen Abstand parallel ist.

4) Eine Gerade zu zeichnen, welche mit einer Geraden MN in einem gegebenen Abstand parallel ist.

5) Eine Gerade zu zeichnen, welche mit einer Ebene in einem gegebenen Abstand parallel ist.

6) Es ist gegeben eine Gerade MN und der G.Riß einer zweiten Geraden, welche mit MN in einem gegebenen Abstand parallel sein soll; den Aufriß zu bestimmen.

7) Die kürzeste Entfernung zweier Geraden zu finden.

8) Gegeben ist eine Gerade MN als Schnittlinie zweier Ebenen, ferner die Grundrißspur von einer der beiden Ebenen und der Neigungswinkel der Ebenen gegen einander; man soll die weiteren Spuren der Ebenen bestimmen.

9) Der Grundriß und die wahre Länge einer begrenzten Geraden AB sind gegeben; man soll ihren Aufriß zeichnen.

Hilfsebenen.

§. 29.

Es wurde schon früher erwähnt, daß man nicht in allen Fällen mit den beiden Grundebenen, beziehungsweise mit G. und A.Riß allein ausreicht und daß man in gewissen Fällen einfachere Lösungen von Aufgaben erreicht dadurch, daß man Ebenen zu Hilfe nimmt, welche parallel oder senkrecht zu den Grundebenen angenommen werden; solche Ebenen bezeichnet man im Allgemeinen mit dem Namen Hilfsebenen.

Eine Ebene EGE' (Fig. 62, Taf. III), welche senkrecht auf beiden Grundebenen steht, heißt Seitenebene. Um die nöthigen Zeichnungsoperationen darin ausführen zu können, wird sie um die Spur GE in die G.T. umgeklappt; GE ist alsdann ebenso als Grundschnitt zwischen Seitenebene und G.T. zu betrachten, wie XX als Grundschnitt zwischen G. und A.T.

1) Ein Punkt A ist durch seine Risse (a, a') gegeben; man soll seinen Seitenriß finden (Fig. 62, Taf. III).

Zieht man a b und a' b' senkrecht auf E E', so sind b und b' die Risse des Punktes (a, a') in der Seitenebene E G E'; klappt man diese nach links in die G.T. um, so beschreibt jeder Punkt auf G E' einen Kreis um G; der Punkt b' bewegt sich nach b'', und da die Ebene des Kreises senkrecht auf E G steht, der Punkt b sich also in der Geraden b a'' fortbewegt, so muß nothwendig a'' die Umklappung des Punktes (b, b'), d. h. der Seitenriß des Punktes A sein.

Bemerkung. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall von der in §. 27 Nro. 2.

2) Die Seitenspur einer zum Grundschnitt parallelen Ebene (O P, O' P') zu zeichnen (Fig. 63, Taf. III).

Der Punkt O', in welchem die Aufrißspur O' P' der Ebene und die Aufrißspur G E' der Seitenebene sich schneiden, kommt offenbar nach der Umkappung der Seitenebene nach o'', während der Punkt O seine Lage nicht verändert, folglich ist o'' O der Schnitt der gegebenen Ebene mit der Seitenebene, d. h. die Seitenspur der Ebene (O P, O' P').

3) Die Schnittlinie zweier zum Grundschnitt parallelen Ebenen O P, O' P' und M N, M' N' zu finden (Fig. 64, Taf. III).

Suche (wie im vorigen Beispiel angegeben ist) die Seitenspuren M'' M und O'' O der beiden Ebenen, und ziehe durch den Schnittpunkt a'' derselben die Gerade a b parallel zum Grundschnitt und a' b' in der Entfernung a'' a ebenfalls parallel zum Grundschnitt, so ist (a b, a' b') die gesuchte Schnittlinie (s. §. 19, Nro. 10, d).

4) Den Schnittpunkt einer Ebene P O P' (Fig. 65, Taf. III) mit einer Geraden zu finden, welche in einer zum Grundschnitt senkrechten Ebene liegt und deren Spuren s und s' sind.

Zeichne den Seitenriß s'' t der Geraden, und den Seitenriß m'' n'' derjenigen Geraden, in welcher die durch die gegebenen Gerade gehende zum Grundschnitt senkrechte Ebene F O F' die Ebene P O P' schneidet, alsdann ist offenbar a'' der

Seitenriß des gesuchten Schnittpunktes, und a und a' G. und A. Riß desselben.

§. 30.

Weitere Beispiele in welchen Hilfsebenen vortheilhaft angewendet werden.

1) Den Durchschnitt zweier Dreiecksebenen (a b c, a' b' c') und (e f g, e' f' g') (Fig. 66, Taf. III) zu zeichnen.

Man schneide die beiden Dreiecke durch Ebenen parallel zur G.T. (a' k' und l' g' seien die Spuren derselben) und zeichne die Schnittlinien derselben im Grundriß; man erhält die Geraden h i und a k einerseits, l n und m g anderer=seits; h i und a k schneiden sich im Punkt p, l n und m g im Punkt q; die Punkte p und q sind daher zwei Punkte, welche beiden Dreiecksebenen zugleich angehören, sind also zwei Punkte der Schnittlinie (o q p, o' q' p') der Dreiecke u. s. f.

2) Es soll ein Prisma (Fig. 67, Taf. III) gezeichnet werden, das mit einer Seite auf der G.T. liegt, m n sei die Richtung der zur G.T. parallelen Seitenkanten, a'' b'' c'' d'' e'' f'' g'' sei die wahre Größe der auf den Seitenkanten senkrecht stehenden Grundfläche, f'' g'' diejenige Seite der Grundfläche, welche in die G.T. zu liegen kommt.

Da die Seitenkanten parallel zur G.T. sind, so muß die Ebene der normalen Grundfläche des Prismas senkrecht auf der G.T. stehen; O P sei die Spur der Ebene der Grund=fläche. Denken wir uns diese um O P in die G.T. umge=klappt, so nimmt sie offenbar die Lage a'' b'' c'' .... g'' ein und zwar so, daß f'' g'' in die Spur O P zu liegen kommt. Bringt man die Grundfläche in ihre ursprüngliche Lage zu=rück, so nehmen die Punkte a'', b'', c'',.... g'' die Lage a, b, c.... g ein, ihre Höhen über der G.T. aber sind offenbar gleich den Entfernungen der Punkte a'', b'', c'' ... g'' von O P; eben so hoch liegen demnach auch die Aufrisse a', b', c'.... g' über dem Grundschnitt.

Da die Kanten des Prismas parallel zur G.T., ihre Aufrisse demnach parallel zum Grundschnitt sind, so ziehe man durch a, b, c . . . . g Linien parallel zu m n und im Aufriß durch a', b', c' . . . . g' Linien parallel zum Grundschnitt. Ist a k die Länge des Prismas, so mache man k l senkrecht zu a k und bringe die Schnittpunkte dieser Linie mit den Kanten des Prismas auf die betreffenden Kanten im Aufriß.

3) Um den Grund- und Aufriß zweier Prismen zu erhalten (Fig. 68, Taf. III), von denen das eine in der G.T. liegt, das zweite schräg gegen das erstere sich stützt,

nehme man eine zur Richtung e m des letzteren parallele Seitenebene O P an; die Seitenflächen des Prismas sind alsdann theils parallel, theils senkrecht auf der Seitenebene; erstere zeigen sich daher hier in ihrer wahren Größe, letztere aber als gerade Linien.

Es seien A C^0 und F L die Seitenrisse der Prismen, a b sei die Länge des in der G.T. liegenden, und i k die Breite des schräg liegenden Prismas. Die G.Risse der Eckpunkte ergeben sich, wenn man durch die Seitenrisse derselben die auf P Q senkrechten Linien A a, B b, C c . . . . . zieht. Der Aufriß ergibt sich in ganz analoger Weise, wie in der vorhergehenden Aufgabe; denn die Höhen der Punkte über O P sind die Horizontaldistanzen, ihre Aufrisse a', b', c' . . . liegen demnach ebenso hoch über dem Grundschnitt.

4) Die Gerade (m n, m' n') (Fig. 69, Taf. III) sei die Kante eines Prismas, durch den Punkt (a, a') derselben geht die eine Grundfläche des Prismas, welche senkrecht auf (m n, m' n'), also auf sämmtlichen Seitenkanten des Prismas steht; a''' b''' c''' d''' e''' sei die wahre Größe der Grundfläche. Man soll G. und A.Riß des Prismas zeichnen.

O P sei die Spur einer zu (m n, m' n') parallelen, zur G.T. senkrechten Seitenebene. Projicirt man auf diese die Gerade (m n, m' n'), und klappt die Seitenebene in die G.T. um, so ist s'' a'' die Umklappung der Geraden (m n, m' n'), (denn der Seitenriß

der G.Spur s liegt offenbar in der Spur OP der Seitenebene, und der Punkt a'' muß über OP ebenso hoch liegen, als der Punkt a' über dem Grundschnitt liegt). Die Ebene der Grundfläche steht, weil senkrecht auf MN, auch senkrecht auf der Ebene OP, ihr Seitenriß ist die auf s'' a'' senkrechte Gerade a'' D. Bringt man diese Grundfläche in die zur G.T. parallele Lage a'' d'', so zeigt sie sich in letzterer in ihrer wahren Größe und Lage a b''' c''' d''' e'''. Es ist deßhalb z. B. b''' der G.Riß von b'', der bei seiner Umklappung in die Ebene a'' D den Bogen b'' B beschreibt; der G.Riß von B aber ist der Punkt b, in welchem b''' b und B b sich schneiden. Der zu b gehörige Aufriß b' liegt ebenso hoch über dem Grundschnitt als der Punkt B über der Spur der Seitenebene.

Hat man auf diese Weise G. und A.Riß der Grundfläche gezeichnet, so ziehe man durch die Eckpunkte der Risse Linien parallel zu m n und m' n'. Die Risse der etwa durch den Punkt s gehenden zweiten Grundfläche des Prismas können ebenso wie die der ersten gefunden werden. Man kann aber auch, da die Seitenkanten von gleicher Länge und unter sich parallel sind, die Länge der Kante a s von b, c, d, e aus auf den übrigen Kanten abtragen und die Endpunkte entsprechend mit einander verbinden. Ebenso wird man auch die Kantenlängen im Aufriß alle gleich a' s' zu machen haben.

Polyedernetze.

§. 31.

Man erhält das Netz eines Polyeders, wenn man die wahre Größe seiner Seiten bestimmt, und dieselben mit den entsprechenden Kanten in einer Ebene an einander fügt.

§. 32.

Das Netz einer Pyramide zu zeichnen, deren Risse gegeben sind (Fig. 70, Taf. III).

a) Man suche die wahre Größe sämmtlicher Pyramidenkanten,

zeichne mit Hilfe derselben die Dreiecke aes^{V}, eds^{IV} u. s. f. und zwar so, daß sie mit den entsprechenden Seiten an die Grundfläche abcde zu liegen kommen.

b) Man klappe die Pyramidenseiten um ihre Spuren, d. h. um die Seiten ae, ed, dc, cb... in die G.T. um. Legt man zu diesem Zweck durch s eine Ebene spS'' senkrecht zu bc, so geht diese durch das Reißlot Ss der Spitze; sie schneidet die G.T. in sp, und die Seite (bcs, b'c's') in der zu bc senkrechten Geraden pS. Bringt man das Dreieck spS in die zur A.T. parallele Lage sp'', so erhält man im Aufriß die wahre Größe s'' p''' s' desselben; s' p''' ist demnach die wahre Länge von (sp, s'p'). Macht man nun pS'' = s' p''' und verbindet S'' mit b und c, so ist bcS'' die Umklappung des Dreiecks (bcs, b'c's) u. s. f.

Die Seiten cS'' und cS''' sind die Umklappungen derselben Pyramidenkante (sc, s'c'), es muß daher cS''' = cS'' seyn; ferner muß nothwendig S''' auf der von s auf cd senkrecht gezogenen Geraden sS''' liegen. Hat man daher die Gerade sS''' gezeichnet, so hat man nur von c aus mit cS'' als Radius den Kreisbogen S'' S''' zu ziehen bis zum Durchschnitt mit sS''', und S''' mit d geradlinig zu verbinden; cdS'' ist sodann die Umklappung der Pyramidenseite cds. Ebenso erhält man edS^{IV}, wenn man mit dS''' als Radius aus d einen Kreisbogen S''' S^{IV} zieht bis zum Schnitt mit der von s auf ed gefällten Senkrechten sS^{IV}; das Dreieck edS^{IV} ist sodann die Umklappung der Pyramidenseite eds u. s. f.

§. 33.

Das Netz eines Prismas zu zeichnen (Fig. 71, Taf. IV).

Da das vorliegende Prisma mit der Grundfläche ghiklm auf der G.T. steht, so sind die Seiten gh, hi, ik.... desselben als die Spuren der Prismenseiten in der G.T. zu betrachten; um diese Spuren klappe man die Seiten in die G.T. um. Bei der Umklappung der Seite agmf um die

Spur m g bewegt sich der Punkt F in einem Kreise, dessen Ebene f f‴ senkrecht auf m g, resp. auf O P steht. Nach der Umklappung wird demnach der Punkt F auf f f‴ zu liegen kommen. Bestimmt man zu diesem Zweck die wahre Länge m′ p′ von (m f, m′ f′) (nach §. 27, 1.) und beschreibt mit einem Radius gleich m′ p′ aus m einen Kreisbogen, der f f‴ in f‴ schneidet, so ist m f‴ die Lage der Kante m f in der Umklappung. Da a g ‖ und = m f, so mache man g a‴ ‖ und = m f‴ und ziehe f‴ a‴, so ist m g a‴ f‴ die Umklappung der Seite (a g m f, a′ g′ m′ f′).

Ebenso erhält man die Umklappungen der anderen Pyramidenseiten, wobei jedoch ebenfalls das in der vorigen Aufgabe angewendete abgekürzte Verfahren zur Anwendung kommen kann.

Schnitte der Polyeder durch Ebenen.

§. 34.

Man findet die Schnittfigur einer Ebene mit einem Polyeder wenn man

a) die Schnittlinien der Ebene mit den erweitert gedachten Polyederseiten bestimmt, und von denselben diejenigen Stücke nimmt, die zwischen den betreffenden Polyederkanten liegen;

b) wenn man die Schnittpunkte der Polyederkanten mit der gegebenen Ebene zeichnet und dieselben entsprechend durch gerade Linien mit einander verbindet.

§. 35.

Den Schnitt einer zur A.T. senkrechten Ebene P O P′ mit einer Pyramide, und die wahre Größe der Schnittfigur zu bestimmen. (Fig. 72, Taf. IV).

Die A.Risse der Schnittpunkte m′, n′, o′, p′, q′ der Ebene mit den Pyramidenkanten liegen in der Spur O P′ derselben, können demnach unmittelbar auf die entsprechenden Kanten im G.Riß gebracht werden; die geradlinige Verbindung dieser

Punkte liefert das Polygon m n o p q als G.Riß der gesuchten Schnittfläche. Klappt man dieses Polygon mit der Ebene P O P′ um die G.Spur O P in die G.T. um, so erhält man die wahre Größe desselben.

Denkt man sich die Seite a b k der Pyramide erweitert, so erhält man offenbar die Gerade b a s als die Spur dieser erweiterten Ebene, sie schneidet die Spur O P der Ebene P O P′ im Punkt s, folglich ist s die Spur der Schnittlinie beider Ebenen. Nun ist aber m n ein Theil dieser Schnittlinie, es muß daher m n verlängert durch den Punkt s gehen.

Ebenso ist e a s′ die Spur der erweitert gedachten Pyramidenseite a e k, folglich s′ die Spur der Schnittlinie dieser Seite mit der Ebene P O P′. Die Kante a k wird aber, wie wir eben gesehen haben, im Punkt m geschnitten, folglich ist m ein Punkt der Schnittlinie; verbinden wir ihn mit s′ und verlängern s′ m bis q, so ist m q der Schnitt der Ebene P O P′ mit der Pyramidenseite a e k u. s. f.

Das Netz der abgestumpften Pyramide erhält man wieder wie in (Fig. 70, Taf. III) durch Umklappung der einzelnen Seiten um ihre Spuren a b, b c, c d . . . . , wobei zugleich bemerkt sei, daß die Umklappungen der Schnittlinien m n, n o, m q . . . in ihrer Verlängerung ebenfalls durch die Punkte s, s′, s″ . . . gehen müssen.

2) Den Schnitt einer Ebene P O P′ mit einem zur G.T. senkrechten Prisma, und die wahre Größe der Schnittfläche zu finden (Fig. 73, Taf. III).

Denken wir uns die Seite a b des Prismas erweitert, so erhalten wir offenbar X Y und Y X′ als die Spuren dieser erweiterten Ebene; sie schneidet die Ebene P O P′ in der Geraden (X Y, x′ X′); folglich ist das Stück m′ n′ die Schnittlinie der Ebene P O P′ mit der Prismenseite (a b, a′ b′ b″ a″). Da f d die G.Spur der Seite a d ist, so ist f die G.Spur der Schnittlinie dieser Seite mit P O P′. Der Aufriß von f ist der Punkt f′ im Grundschnitt; da die Kante a′ a″ in m′ geschnitten wird, so ist die Verbindungslinie

f' m', resp. f' p' die Schnittlinie der erweiterten Prismenseite (a d, a' d' d'' a'') mit P O P', oder m' p' der Schnitt mit der Seite allein.

Die Seite b c ist mit der Seite a d parallel, wird demnach von P o P' in einer mit m' p' parallelen Geraden n' o' geschnitten. Ebenso muß die Schnittlinie o' p mit m' n' parallel sein, da die Seite c d des Prismas mit der Seite a b parallel ist.

Die wahre Größe der Schnittfigur erhält man durch Umklappung derselben mit der Ebene P O P' um die Spur O P in die G.T. Nach §. 27, Nr. 7 und 8 ist X X'' die Umklappung der Geraden (X Y, x' X'), wenn man Y X'' senkrecht zu O P zieht, mit O X' den Kreisbogen X' X'' beschreibt bis zum Durchschnitt mit Y X'' und nun X X'' zieht. Die Punkte (a, m') und (b, n') nehmen nach der Umklappung offenbar die Lage m'' und n'' ein und m'' n'' ist demnach die wahre Größe (Umklappung) von (a b, m' n'). Da f die Spur der Geraden (a d, m' p') und e die Spur von (b c, n' o') ist, m'' und n'' aber die Umklappungen von je einem Punkt dieser Geraden sind, so muß nothwendig f m'' p'' und e n'' o'' die Umklappung von f d und e c sein. Die Punkte p'' und o'' aber liegen zugleich auf den von d und c auf O P gefällten Senkrechten d p'' und c o''. Zieht man schließlich noch o'' p'', so ist m'' n'' o'' p'' die wahre Größe der Schnittfläche; o'' p'' muß nothwendig mit m'' n'' parallel sein, was als Genauigkeitsprobe für die Zeichnung gelten mag.

4) Den Schnittpunkt einer Geraden (m n, m' n') mit einem Prisma, einer Pyramide, oder überhaupt mit einem Polyeder zu finden (Fig. 73ª, Taf. III).

Schneide den Körper durch eine durch (m n, m' n') beliebig gehende Ebene (am besten durch eine der beiden Reißebenen); diejenigen Punkte, in welchen alsdann die Gerade m n, m' n') die Risse der Schnittfigur trifft, sind die gesuchten Schnittpunkte der Geraden M N mit der Körperoberfläche.

Nehmen wir z. B. die horizontalprojicirende Ebene m n an, so ergibt sich daraus leicht der Aufriß a' b' der Schnittfigur. Derjenige Punkt p', in welchem der Riß m' n' der Geraden den Aufriß a' b' der Schnittfigur trifft, ist der gesuchte Schnittpunkt.

Schnitt der Polyeder unter sich.

§. 36.

Die Schnittfigur zweier Polyeder liegt in den meisten Fällen nicht in einer Ebene. Zwei Polyeder können 1) in einander eindringen, 2) einander durchdringen, 3) sich gegenseitig ausschneiden. Im ersten und dritten Fall entsteht eine einzige zusammenhängende Schnittfigur, im zweiten Fall besteht sie aus zwei getrennten Stücken.

Im Allgemeinen erhält man die Schnitte zweier Polyeder unter sich 1) wenn man die gegenseitigen Schnittlinien der Polyederseiten zeichnet (s. §. 30, 1.) oder 2) wenn man die Schnittpunkte der Polyederkanten des einen mit den Seiten des andern sucht und diese entsprechend geradlinig mit einander verbindet.

§. 37.

1) Den Schnitt zweier Prismen (A, A') und (B, B') zu zeichnen. Die Grundflächen beider liegen in der G.T. Die Seitenkanten des ersten (A, A') sind senkrecht zur G.T., die des zweiten parallel zur A.T. (Fig. 74, Taf. III).

Legt man durch die Kante (a, a' a'') eine Ebene a a''' parallel zur A.T., so schneidet diese beide Prismen, und zwar das Prisma (A, A') in der Kante (a, a' a'') und das Prisma (B, B') in zwei Geraden, welche parallel zu dessen Seitenkanten durch die Punkte f und g gehen, d. h. in dnn Geraden f' 6' und g' 4' im Aufriß. Die Punkte 6' und 4' aber, in welchen die Geraden f' 6' und g' 4' die (in derselben Ebene a a''' liegende) Kante (a, a' a'') schneiden, sind zwei Punkte der gesuchten Schnittfläche.

Legt man durch die von (m, m') ausgehende Kante des Prismas (B, B') eine zur A.T. parallele Ebene, so schneidet diese das Prisma (A, A') in zwei durch 1 und 1'' gehende mit dessen Kanten parallelen Geraden; der Schnitt dieser beiden Geraden mit der Kante (m 1, m' 1') liefert im Aufriß die Punkte 1' und 1''' der Schnittfigur u. s. f.

Durch geradlinige Verbindung der so gefundenen Schnittpunkte in gehöriger Reihenfolge ergibt sich die Schnittlinie 1' 2' 3' 4' 5' und 1''' 2''' 3''' 4''' 5'''.

2) Den Schnitt zweier Prismen (A, A') und B, B') zu zeichnen, welche eine beliebige Lage gegen die Grundebene haben. (Fig. 75, Taf. IV.)

Schneidet man die Prismen durch Ebenen, welche mit den Richtungen der Seitenkanten beider zugleich parallel sind, so sind die so erhaltenen Schnittlinien offenbar beiderseits mit den Prismenkanten parallel. Die Durchschnittspunkte der in derselben Ebene liegenden Schnittlinien gehören dann offenbar beiden Prismen zugleich an und sind demnach Punkte der Schnittfigur.

Da die Grundflächen der Prismen (A. A') (B' B') in der G.T. liegen, so suche man die G.Spur einer Ebene, welche mit den Richtungen beider Prismen zugleich parallel ist. Eine solche erhält man aber, wenn man durch einen beliebigen Punkt (x, x') eine Gerade (o p, o' p') parallel zur Richtung des Prismas (A, A') und (m n, m' n') parallel zur Richtung des Prismas (B, B') zieht, und durch diese eine Ebene legt; die Verbindungslinie r s der beiderseitigen G.Spuren ist die G.Spur der Ebene.

Die durch die Kante a des Prismas (A, A') gehende mit r s parallele Ebenenspur a a''' schneidet die Grundfläche des Prismas (B, B') in I und III. Die Ebene deren Spur a a''' ist, schneidet demnach das Prisma (B, B') im Aufriß in den mit dessen Kanten parallelen Geraden a'' 7 und a^{IV} 3; da in derselben Ebene auch die durch (a, a') gehende Kante des Prismas (A, A') liegt, so müssen die

Punkte 7 und 3, in welchen diese Kante von a'' 7 und a^{IV} 3 geschnitten wird, Punkte der Schnittfigur sein. Auf gleiche Weise, d. h. durch wiederholte Anwendung von Schnittebenen, deren G.Spuren parallel zu r s sind, findet man sämmtliche Eckpunkte der Schnittfigur und durch geradlinige Verbindung derselben letztere selbst.

3) Den Schnitt zweier Pyramiden zu zeichnen, deren Grundflächen in der G.T. liegen. (Fig. 76, Taf. IV.)

Man verbinde die Spitzen der Pyramiden durch eine Gerade (y z, y' z'). Jede Ebene welche man durch diese Linie legt, schneidet die Pyramiden in Geraden, welche von den Spitzen derselben ausgehen. Die Grundrißspur der Geraden (y z, y' z') ist der Punkt s; jede Gerade, wie z. B. s t, welche durch diesen Punkt s gezogen wird, kann als die G.Spur einer Ebene betrachtet werden, welche durch (y z, y' z') geht. Die Seiten der Grundflächen der Pyramiden sind im vorliegenden Fall offenbar zugleich die Spuren der Pyramidenseiten. Die durch (y z, y' z') gehende Ebene, deren G.Spur s t ist, schneidet die eine Grundfläche in g, die andere in m und n; g, m und n sind demnach die Spuren der Linien, in welchen jene Ebene die betreffenden Pyramidenseiten schneidet; da diese Linien durch die Spitze y und z gehen müssen, so können es nur die Geraden y z, m y und n y seyn. Die Schnittpunkte dieser Geraden sind nun Punkte der gesuchten Schnittfigur.

4) Den Schnitt eines Prismas mit einer Pyramide zu finden. (Fig. 77, Taf. IV.)

Zieht man durch die Pyramidenspitze (S, S') eine mit der Richtung des gegebenen Prismas parallele Gerade (S t, S' t'), so schneidet jede Ebene, welche man durch diese Gerade legt, die Pyramide in Geraden, welche von der Spitze ausgehen, und das Prisma in Geraden parallel zu dessen Seitenkanten; die G.Spur jeder durch (S t, S' t') gehenden Ebene aber geht durch die Spur t dieser Geraden.

Ist z. B. t n die G.Spur einer solchen Ebene, so schneidet

diese das Prisma in r x und s y (beide parallel zu a f) und die Pyramide in der Kante n S. Die Punkte, in welchen n S von r x und s y geschnitten wird, sind aber offenbar Punkte der Schnittfigur u. s. f.

5) O P, Q R, U T (Fig. 78, Taf. IV) seien etwa die Traufslinien von Dachflächen, die normalen Ebenenschnitte M N und T R mit diesen Dachflächen seien in die Ebene der Trauflinien umgeklappt, man erhält daher hier die Horizontalneigung α, β, γ der Dachflächen, oder in R S T den Schnitt der Ebene R T mit dem prismatischen Dachraum; man soll den Schnitt dieser Dachflächen zeichnen.

Die Trauflinien beider Dächer schneiden sich in U und Q, folglich sind dies zwei Punkte des Schnittes.

Schneidet man die Dachflächen durch eine horizontale Ebene, so erhält man Linien parallel zu den Traufen. Eine solche Ebene haben wir z. B. in v w und v' w', wenn v w mit M N und V' W' mit R T in gleichem Abstand parallel ist. Diese Ebene schneidet die Dachflächen in a b ‖ O P, und in d f und c e ‖ Q R. Diese Linien schneiden sich in e und f, folglich gehören diese beiden Punkte der Schnittfigur beider Dachflächen an. Verbinden wir sie mit U und Q, so erhalten wir in U g Q die gesuchte Schnittfigur.

§. 38.

Stehen die gegebenen Körper mit ihren Grundflächen nicht auf der G.T, so verlängert man die Pyramide oder das Prisma bis zum Durchschnitt mit der G.T., betrachtet diese Durchschnitte (Spuren) als die Grundflächen und construirt wie in den Beispielen des vorigen §. angegeben ist, oder man schneidet die Körper durch eine zur G. T. parallele Ebene, betrachtet diese als neue G.T. und construirt in derselben ebenso wie oben.

Von den krummen Linien.

§. 39.

Eine Curve heißt eben oder einfach gekrümmt, wenn alle Punkte derselben in einer Ebene liegen; ist dies nicht der Fall, so heißt sie gewunden oder doppelt gekrümmt.

Ein unendlich kleiner Bogen, d. h. ein solcher der kleiner ist als jede noch meßbare Größe, heißt ein Element der Curve. Ein solches Curvenelement kann man als gerad ansehen, seine Verlängerung ist zugleich Tangente an dieser Stelle der Curve. Diejenige Linie, welche senkrecht auf einem Curvenelement, resp. auf der Tangente steht, heißt Normale.

§. 40.

Ist eine beliebige Curve durch ihren Umriß gegeben, und soll eine Tangente an dieselbe gezogen werden, so wird man durch entsprechendes Anlegen eines Lineals die Richtung der Tangente immer mit derjenigen Genauigkeit zeichnen können, die für die gewöhnlichen praktischen Ausführungen hinreicht. Dagegen kann man über die genaue Lage des Berührungspunktes im Zweifel sein, man findet ihn jedoch stets mit hinreichender Genauigkeit auf folgende Weise.

1) Um den Punkt c (Fig. 79, Taf. IV) zu finden, in welchem die Curve b c d von der durch den Punkt a gehenden Tangente berührt wird, ziehe man von a aus beliebige gerade Linien, welche die Curve b c d schneiden, halbiere die innerhalb der Curve liegenden Sehnen, und verbinde die Halbirungspunkte durch eine stetige Curve e c; ihr Schnittpunkt c mit der gegebenen Curve ist der gesuchte Berührungspunkt.

2) An die Curve b c d (Fig. 80, Taf. IV) eine Tangente parallel zu der Geraden m n zu ziehen, und den Berührungspunkt zu bestimmen. — Man schneide die Curve durch gerade Linien parallel zu m n, halbiere die innerhalb der Curve liegenden Sehnen, und ziehe durch die Halbierungspunkte eine stetige Curve; ihr Schnitt-

punkt c mit b c d ist der gesuchte Berührungspunkt, und die Gerade o p, welche man ‖ m n durch c zieht, die verlangte Tangente.

Bemerkung. ad. 1. Ist die gegebene Curve b c d (Fig. 79, Taf. IV) ein Kreis, so ist die Hilfscurve e c ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunkt bekanntlich der Halbirungspunkt derjenigen Geraden ist, welche den Punkt a mit dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises verbindet.

ad. 2. Ist die Curve b c d (Fig. 80, Taf. IV) ein Kreis, so wird die Hilfscurve e c zur Geraden, d. h. zu einem auf m n senkrechten Halbmesser.

§. 41.

Nähert sich eine Curve einer Geraden in ihrer Fortsetzung immer mehr und mehr, ohne sie aber jemals zu erreichen, so heißt die Gerade eine Asymtote. Die Asymtote ist Tangente an einem unendlich entfernten Punkt der Curve.

§. 42.

Besondere Punkte. Liegt ein Punkt a (Fig. 81, Taf. IV) auf einer Curve so, daß ein Theil derselben links, ein Theil rechts von der durch a gehenden Tangente m n liegt, so heißt a ein Wendepunkt.

Verwandelt eine Curve von einem Punkt a aus (Fig. 82 und 83, Taf. IV) plötzlich ihre Richtung in die entgegengesetzte, so heißt der Punkt a ein Rückkehrpunkt und zwar bildet der Punkt a in Fig. 82 eine Spitze, in Fig. 83 einen Schnabel.

Geht eine Curve mehrmals durch denselben Punkt, so heißt ein solcher ein mehrfacher Punkt.

§. 43.

Eine Curve rektificiren heißt: sie in eine gerade Linie verstrecken, oder auf einer Geraden eine Länge gleich der Länge der Curve abtragen. Die Rektification einer Curve kann dadurch geschehen, daß man einen Zirkel nur so weit öffnet, daß das zwischen den beiden Zirkelspitzen liegende Bogenstück der Curve als ge-

rade angesehen werden kann, und diese Länge auf einer Geraden ebenso oft aufträgt, als dies auch auf der Curve der Fall ist.

Da der Durchmesser des Kreises zu seinem Umfang sich sehr nahe verhält wie 7:22, so erhält man am einfachsten und mit hinreichender Genauigkeit die Rektification des Kreises K (Fig. 84, Taf. IV), wenn man auf einer Geraden a m 22 beliebig große aber gleiche Theile, auf einer zweiten Geraden a n von a aus eine Länge a c gleich a b aufträgt, den 7. Punkt auf a m mit c verbindet und mit der Verbindungslinie eine Parallele durch den 22. Punkt zieht, dann ist a d eine Länge gleich dem Umfang des Kreises. Denn es ist

$$a\,c : a\,d = a\,7 : a\,22$$
$$= 7 : 22.$$

Daß man ein beliebiges Bogenstück einer Curve auch auf eine andere Curve von beliebiger Krümmung in gleicher Weise so übertragen kann, wie oben für das Uebertragen auf eine Gerade angegeben wurde, versteht sich von selbst.

§. 44.

Evolvente und Evolute.

Man denke sich um eine Curve einen Faden gelegt und so abgewickelt, daß das abgewickelte Stück stets straff gespannt bleibt, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens eine Curve, welche man Evolvente heißt; die ursprüngliche Curve aber heißt die Evolute.

Jede Tangente an die Evolute ist Normale der Evolvente; der Berührungspunkt ist der Krümmungsmittelpunkt, und die Länge der Tangente der Krümmungshalbmesser für den betreffenden Punkt der Evolvente, die Länge der Tangente an der Evolute aber ist stets gleich dem abgewickelten Bogenstück.

Daraus ergibt sich die Construction der Evolvente für eine beliebige Curve a b c d ... (Fig. 85, Taf. IV). Man mache die Tangente b m = arc a b, die Tangente c n = arc a c, die Tangente d o = arc a d u. s. f. und verbinde die Endpunkte der Tan-

gente durch eine stetige Curve a m n o p, so ist dies die gewünschte Evolvente.

Da gleiche Bogenstücke des Kreises gleiche Länge haben, so ist die Evolvente des Kreises leicht zu construiren, indem man die Punkte a, b, c, d mit der Peripherie des Kreises in gleichen Entfernungen annimmt, alsdann die Länge eines solchen Bogenstückes auf der ersten Tangente vom Berührungspunkt nur einmal, auf der nächsten zweimal, auf der dritten dreimal u. s. w. aufträgt.

Projektion ebener Curven.

§. 45.

1) Ein vielfacher Punkt einer Curve, ein Wendepunkt, Rückkehrpunkt 2c. ist auch in der Projektion ein vielfacher Punkt, ein Wendepunkt, Rückkehrpunkt u. s. f.

2) Ist eine Gerade M N Tangente im Punkt A einer Curve, so ist auch der G. und A.Riß des Geraden Tangente am G. und A.Riß der Curve und zwar im G. und A.Riß des Punktes A.

3) Liegt eine Curve in einer zur G. oder A.T. senkrechten Ebene, so ist ihr Riß in der betreffenden Grundebene eine gerade Linie. (Denn ihr Riß liegt in der betreffenden Spur der Ebene.)

§. 46.

1) Der G.Riß einer Curve und die Spuren der Ebene, in welcher die Curve liegt, sind gegeben, man soll den Aufriß dazu finden. (Fig. 86, Taf. IV.)

Ziehe in der Ebene P O P' beliebige gerade Linien, welche die Curve schneiden, bringe die Punkte, in welchen die G.Risse der Geraden den G.Riß der Curve schneiden, auf die entsprechenden A.Risse der Geraden und verbinde diese Punkte im A.Riß durch eine stetige Curve.

2) Zu untersuchen ob eine durch ihre Risse gegebene Curve eine ebene oder gewundene sei. (Fig. 87, Taf. IV.)

Zieht man im G.Riß zwei parallele Gerade m n und p q und zeichnet den Aufriß m' n' und p' q' dazu, so ist die

Curve eine ebene, wenn m' n' ‖ p' q', andernfalls eine gewundene.

3) Es ist die Spur einer Ebene, ihr Neigungswinkel und eine in der Umklappung der Ebene liegende Curve gegeben, man soll G. und A.Riß derselben zeichnen.

Verfahre wie in §. 27, Nr. 6.

Kreisprojektion.

§. 47.

Die Gerade a e (Fig. 88, Taf. IV) sei der Durchmesser eines in der G.T. liegenden Kreises a b c d e; von beliebigen Punkten b, c, d . . . seien auf den Durchmesser a e die Senkrechten b f, c g, d h . . . gefällt; es sei ferner a i k l e die Lage des Kreises, nachdem er um den Durchmesser a e als Axe um den Winkel α gedreht wurde. Fällt man von dem Punkte i, k, l . . . auf die G.T. die Lote i i', k k', l l' . . . so sind offenbar die Dreiecke i f i', k g k', l h l' . . . einander ähnlich, da jedesmal der Winkel bei i', k', l' .. Rechte und die Winkel bei f, g, h .. $= \alpha$ sind. Es ist also

$$h l' : h l = g k' : g k = f i' : f i,$$

oder da

$$h l = h d,\ g k = g c,\ f i = f b,$$

$$h l' : h d = g k' : g c = f i' : f b$$

d. h. die von den Punkten b, c, d . . . auf den Durchmesser a e gefällten Senkrechten sind in l', k', i' in einem bestimmten Verhältniß getheilt; die durch diese Punkte gehende Curve a i' k' l' . . e ist daher bekanntlich eine Elipse; sie ist aber die Projektion des Kreises a i k l e, woraus folgt, daß die Projektionen (Risse) eines Kreises stets Elipsen sein müssen (ausgenommen den Fall §. 45, Nro. 3).

Nur einer der unendlich vielen Durchmesser, welche man durch den Mittelpunkt eines Kreises ziehen kann, projicirt sich auf die Grundebenen in seiner wahren Größe nämlich derjenige, welcher parallel zur betreffenden Grundebene ist, die Risse aller anderen Durchmesser sind verkürzt, daher ist der Riß des zur Grund-

ebene parallelen Durchmessers stets die große Axe der Elipse; die kleine Axe der Elipse ist der Riß desjenigen Durchmessers, welcher auf jenem senkrecht steht.

Die Risse des Kreismittelpunktes sind die Mittelpunkte der Elipsen.

Stehen in einem Kreise zwei Durchmesser senkrecht auf einander, so halbirt der eine alle Sehnen, welche mit dem andern parallel sind. Dasselbe muß auch stattfinden mit den Rissen dieser beiden Durchmesser. Haben daher zwei Durchmesser einer Elipse die Eigenschaft, daß jeder die mit dem andern Durchmesser parallelen Sehnen halbirt, so sind sie die Risse zweier auf einander senkrecht stehenden Kreisdurchmesser und heißen conjungirte Durchmesser.

Ist demnach eine Elipse b d c e (Fig. 89, Taf. IV) der Grundriß eines Kreises, (a, a') der Mittelpunkt des Kreises, und man soll den A.Riß desselben finden, so wird man zunächst den A.Riß desjenigen Durchmessers g h zeichnen, der parallel zur A.T. ist. Die Aufrisse g' und h' müssen jedenfalls auf den durch g und h gehenden zum Grundschnitt senkrechten Geraden liegen, zugleich muß a' g' und a' h' gleich der wahren Größe des Kreishalbmessers, also gleich der halben großen Axe a b sein. Beschreibt man daher mit a b als Halbmesser aus dem Mittelpunkt a' einen Kreisbogen bis zum Durchschnitt mit gg', so ist g' oder g'' der A.Riß zu g; welcher von beiden Punkten, g' oder g'', der geeignete sei, wird in jedem speciellen Fall besonders zu entscheiden sein. Wählen wir den Punkt g', so ist g' a' h' der Aufriß von g a h, also die große Axe der Elipse. Die kleine Axe i' k' aber steht senkrecht auf g' h', ihr Grundriß ist der zu g h conjungirte Durchmesser i k, d. h. ein solcher Durchmesser der irgend eine zu g h parallele Sehne f c halbirt.

Construktion der Elipse.

a) Sind die beiden Hauptaxen m n und p q (Fig. 90, Taf. IV) einer Elipse gegeben, so läßt sich dieselbe sehr rasch und bequem mit Hilfe eines Papierstreifens auf folgende Weise zeichnen. Man trage auf dem Rande eines Papierstreifens die

halbe große Axe (a b = o n) ab, mache b c = der halben kleinen Axe o q, und lege den Papierstreifen quer über beide Axen so, daß der Punkt a stets auf p q, der Punkt c auf m n zu liegen kommt, der Punkt b liegt dann stets auf der Peripherie der Elipse.

b) Sind statt der beiden Hauptaxen zwei conjungirte Durchmesser m n und p q der Elipse (Fig. 91, Taf. IV) gegeben, so kann man dieselbe ebenfalls mit Hilfe eines Papierstreifens zeichnen. Man ziehe durch den Endpunkt q des einen Durchmessers eine Senkrechte r s auf den andern Durchmesser m n, mache q r = o n und ziehe die Gerade r v durch den Punkt o. Bezeichnet man nun auf einem Papierstreifen die drei Punkte r, q und s und bewegt denselben so, daß r stets auf r v, s stets auf m n bleibt, so liegt der Punkt q jedesmal auf der Peripherie der Elipse.

Inhalt der Elipse.

Projicirt man eine beliebige ebene Flächenfigur M auf eine Ebene E, und ist der Neigungswinkel der Ebene M gegen E = α, so ist der Flächeninhalt J der Projektton von M

$$J = M \,.\, \cos \alpha.$$

Der Inhalt eines Kreises mit dem radius = r ist $r^2 \pi$, folglich der Inhalt seiner Projektion

$$J = r^2 \pi \,.\, \cos \alpha = r \pi \,.\, (r \,.\, \cos \alpha).$$

Bezeichnet man in Fig. 88 h l = h d = h c mit r, so ist

$$r \,.\, \cos \alpha = h\, e \cos \alpha = h\, l'$$

oder der Inhalt der Elipse

$$J = h\, e \,.\, h\, l' \,.\, \pi,$$

d. h. der Inhalt einer Elipse ist das Produkt aus den beiden Halbaxen und der Zahl π (= 3,14).

§. 33.

Uebungsaufgaben.

1) Es ist gegeben der Halbmesser r eines Kreises, die Risse der Ebene, in welcher der Kreis liegt, und die Lage des Mittelpunktes; man soll die Risse des Kreises zeichnen.

2) Die Risse eines Kreises zu zeichnen, welcher durch drei gegebene Punkte (a, a'), (b, b'), (c, c') geht.

Von den gewundenen Curven.

§. 49.

Was oben in §. 45 Nro. 1 und 2 von den ebenen Curven gesagt wurde, gilt auch für gewundene Curven.

Der Riß einer gewundenen Curve kann niemals eine gerade Linie werden, weil dieß voraussetzen würde, daß die Curve in einer Ebene läge, was nicht möglich ist.

Ist b b' b'' a (Fig. 92, Taf. IV) eine gewundene Curve, und wird sie von der Geraden m n in den Punkten a und b geschnitten, so wird sich der Punkt b bei der Drehung der Geraden um a, während sie die Curve in einem zweiten Punkt b, b', b'' ... schneidet, dem Punkt a stets mehr und mehr nähern und schließlich mit a zusammenfallen, in dieser Lage m' n' ist alsdann die Gerade m n zur Tangente an die gewundene Curve geworden.

§. 50.

1) Die Schnittpunkte einer gewundenen Curve mit einer Ebene zu finden (Fig. 93, Taf. IV).

Man betrachte den Grundriß a b c d der Curve als den Grundriß einer in der Ebene P O P' liegenden Curve und zeichne nach §. 46, 1 den Aufriß a'' b'' c'' d'' dazu. Diejenigen Punkte, in welchen dieser Aufriß den Aufriß a' b' c' d' der gewundenen Curve schneidet, sind die Schnittpunkte der letzteren mit der Ebene P O P'.

Von den krummen Flächen.

§. 51.

1) Eine krumme Fläche kann ebenso wenig als eine Ebene durch die Risse ihrer sämmtlichen Punkte dargestellt werden; dagegen gibt die Art ihrer Entstehung, wie wir unten sehen werden,

stets das Mittel an die Hand zu jedem beliebigen Punkt derselben G. und A.Riß zu finden; es ist daher auch möglich die Risse jeder auf einer solchen Fläche liegenden Linie zu zeichnen.

2) Eine gesetzmäßige, mathematische, auf dem Weg der darstellenden Geometrie darstellbare krumme Fläche wird erzeugt durch die Bewegung einer Linie oder Fläche nach einem bestimmten Gesetz, wie wir das in den nachfolgenden speciellen Fällen zu zeigen versuchen werden.

3) Durch einen Punkt A einer krummen Fläche können auf ihr unendlich viele Linien gezeichnet werden; jede Tangente an eine solche Curve im Punkt A ist auch Tangente an der krummen Fläche im Punkt A; alle diese Tangenten liegen in einer Ebene, und diese ist Berührungsebene an der Fläche. Können auf der Fläche durch den Punkt A zugleich eine oder mehrere gerade Linien gezogen werden, so gehören diese ebenfalls der Berührungsebene an, d. h. die krumme Fläche wird von der Berührungsebene in diesen Geraden berührt.

I. Cylinderflächen.

§. 52.

Eine Cylinderfläche entsteht, wenn sich eine Gerade so bewegt, daß sie, während sie eine beliebige Curve fortwährend schneidet, einer gegebenen Richtung stets parallel bleibt. Die bewegliche Gerade heißt die Erzeugende, eine einzelne Lage derselben eine Mantellinie, die Curve die Leitlinie.

Ist die Leitlinie eine ebene Curve, so darf die Richtung der Erzeugenden der Ebene der Curve nicht parallel sein, weil sonst statt einer Cylinderfläche eine Ebene entstünde.

Die Schnitte einer Cylinderfläche mit den Grundebenen heißen Spuren.

Wird eine Cylinderfläche durch parallele Ebenen geschnitten, so sind alle Schnitte congruent; Ebenen parallel zur Richtung der Erzeugenden schneiden die Cylinderfläche in Mantellinien.

1) Die Leitlinie (a b c d, a' b' c' d') einer Cylinderfläche (Fig. 94, Taf. V) und die Richtung (m n, m' n') ihres Erzeugenden ist gegeben, man soll eine beliebige Mantellinie zeichnen.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt (a, a') der Leitlinie eine Gerade parallel zu (m n, m' n') so ist dieß eine Mantellinie der Cylinderfläche.

Bemerkung. Zieht man an die Risse der Leitlinie Tangenten parallel zu (m n, m' n'), so sind dies die horizontalen und vertikalen Umrisse der Fläche. Sie sind offenbar die Grenzlinie zwischen den sichtbaren und nicht sichtbaren Theilen der Fläche. Der Uebersichtlichkeit halber werden die auf der sichtbaren Seite liegenden Mantellinien ausgezogen, die anderen punktirt.

2) Von einem auf einer Cylinderfläche liegenden Punkt P (Fig. 94, Taf. V) ist der Grundriß p gegeben; man soll den Aufriß finden.

Ziehe durch p den G.Riß einer Mantellinie p a; ihr Aufriß geht durch den Punkt a' der Leitlinie; auf letzterem liegt auch der Aufriß p' des Punktes P.

3) Die Spuren einer Cylinderfläche zu zeichnen (Fig. 94).

Zeichne eine hinreichende Anzahl von Mantellinien, bestimme deren Spuren und verbinde diese durch stetige Curven.

4) Den Schnitt einer Ebene P O P' mit einer Cylinderfläche zu zeichnen, wenn deren Leitlinie und die Richtung der Erzeugenden gegeben ist. (Fig. 95, Taf. V.)

Bestimme die Schnittpunkte einer hinreichenden Anzahl von Mantellinien mit der gegebenen Ebene und verbinde diese durch eine stetige Curve.

§. 54.

Berührungsebenen an Cylinderflächen.

Wird eine Cylinderfläche von einer Ebene in einem Punkt A berührt, so findet die Berührung stets längs der durch A gehenden Mantellinie statt (s. §. 51, 3).

Schneidet man die Cylinderfläche sammt der Berührungsebene durch eine zweite Ebene E, so ist die Gerade, in welcher die Berührungsebene geschnitten wird, Tangente am Schnitt der Cylinderfläche und zwar in demjenigen Punkt, in welchem die berührte Mantellinie von E geschnitten wird.

Die Spuren der Berührungsebene an eine Cylinderfläche sind daher stets Tangenten an den Spuren der Fläche.

1) Die G.Spur und die Richtung (m n, m' n') der Erzeugenden einer Cylinderfläche ist gegeben; man soll die Spuren einer Ebene bestimmen, welche die Cylinderfläche im Punkt (p, p') berührt. (Fig. 96, Taf. V.)

Nach obigen Bemerkungen geht die verlangte Berührungsebene durch die Mantellinie (p s, p' s') und ihre Grundrißspur O P ist im Punkt s Tangente an die G.Spur des Cylinders. Die Aufrißspur der Berührungsebene geht durch die A.Spur t' der berührten Mantellinie (s t, s' t'). Trifft nun die Grundrißspur O P den Grundschnitt noch innerhalb des Zeichnungsblattes im Punkt O, so ist dieser Punkt einfach mit t' zu verbinden; ist das aber nicht der Fall, so zeichne man die Risse einer in der Berührungsebene beliebig liegenden Linie; eine solche ist z. B. die Gerade (x y, x' y'), denn sie geht durch einen in der Ebene liegenden Punkt (p, p') und hat ihre G.Spur x in der G.Spur O P der Ebene, ihre A.Spur ist y'. Verbindet man nun t' mit y', so ist die Gerade O' P' die Aufrißspur der Berührungsebene.

Bemerkung. Jede Gerade, welche in der Ebene POP' gezogen werden kann, berührt die Fläche in einem Punkt der Mantellinie (s t, s' t'), folglich ist auch jede Linie, welche in der Berührungsebene (O P, O' P') durch den Punkt (p, p') gezogen werden kann, Tangente im Punkt (p, p') der Cylinderfläche [so z. B. die Linie (x y, x' y')].

2) An die Cylinderfläche (Fig. 96, Taf. V) soll eine Berührungsebene gelegt werden, welche zugleich mit einer gegebenen Geraden (a b, a' b') parallel ist.

Zeichne die Spuren einer Ebene, welche mit der gegebenen Geraden (a b, a' b') und mit der Richtung der Mantellinien [d. h. mit der Richtung (m n, m' n') der Erzeugenden] zugleich parallel ist (s. §. 19, 17) und ziehe O P parallel M N tangirend an die G.Spur des Cylinders, so ist O P die G.Spur der verlangten Berührungsebene; ihre A.Spur O' P' ist parallel zu M' N' und geht durch die A.Spur t' der berührten Mantellinie (s t, s' t').

Bemerkung. Da an die G.Spur der Fläche zwei Tangenten parallel zu M N gezogen werden können, so sind auch zwei Berührungsebenen möglich, welche der Aufgabe entsprechen.

3) Durch einen außerhalb einer Cylinderfläche liegenden Punkt (p, p') (Fig. 97, Taf. V) eine Berührungsebene an dieselbe zu legen.

Die Cylinderfläche sei durch ihre Spur und die Richtung ihrer Erzeugenden gegeben. Zieht man durch (p, p') eine Linie (p t, p' t') parallel zur Richtung der Erzeugenden, so muß die gewünschte Berührungsebene durch diese Linie, also ihre G.Spur durch die G.Spur t dieser Geraden gehen, zugleich aber auch die G.Spur der Cylinderfläche berühren; daher ist die durch den Punkt A gehende Tangente O P die G.Spur der verlangten Berührungsebene. Die berührte Mantellinie ist (s a, s' a'); die A.Spur der Berührungsebene geht daher durch die A.Spuren der Geraden (p t, p' t') und (s a, s' a').

Bemerkung. Können von t aus an die G.Spur der Cylinderfläche mehrere (im vorliegenden Fall zwei) Tangenten P O und P'' O'' gezogen werden, so sind auch mehrere Berührungsebenen an die Fläche möglich.

§. 55.

Schnitte von Ebenen und Linien mit Cylinderflächen.

1) Ein auf der G.T. senkrecht stehender Cylinder (Fig. 98, Taf. IV) wird durch eine zur A.T. senkrechte Ebene P O P' geschnitten. Man soll die wahre Größe der Schnittfläche zeichnen.

Die Risse der Schnittfläche sind der Kreis a b c d und die Gerade a' c', ihre wahre Größe findet sich durch Umklappung der Ebene P O P' um die G.Spur O P (s. §. 27, Nro. 2).

2) Die Schnittebene P O P' habe eine beliebige Lage gegen die Grundebenen.

Man suche den Durchschnitt einer hinreichenden Anzahl von Mantellinien mit der Ebene P O P' (nach §. 19, 11) und verbinde ihre G. und A.Risse durch stetige Curven.

3) Hat auch der Cylinder eine beliebige Lage gegen die Grundebenen, so ist das Verfahren das nämliche wie oben sub. 2.

4) Die Punkte zu finden, in welchen eine Gerade L eine Cylinderfläche schneidet.

a) Man schneide die Cylinderfläche durch eine Ebene, welche man durch die Gerade L beliebig legen kann, (am besten durch eine der beiden Reißebenen der Geraden L) diejenigen Punkte, in welchen die Risse von L die Risse der Schnittcurve schneiden, sind die Risse der verlangten Schnittpunkte.

b) Ziehe durch einen beliebigen Punkt der Geraden L eine Linie F parallel zu den Mantellinien der Cylinderfläche und lege durch L und F eine Ebene; diese schneidet die Cylinderfläche in einer oder mehreren Mantellinien M, M', M'' . . .; die Punkte, in welchen die Gerade L und M, M', M'' . . . sich schneiden, sind offenbar die gewünschten Schnittpunkte.

Abwicklung der Cylinderflächen.

§. 56.

Liegen zwei auf einanderfolgende Lagen der Erzeugenden irgend einer Fläche in einer Ebene, so bilden sie einen unendlich kleinen Flächenstreifen, und es ist möglich, alle diese Streifen in einer Ebene aneinander zu reihen, also die Fläche selbst in eine Ebene auszubreiten, d. i. abzuwickeln.

Ist auf der Fläche irgend eine beliebige Curve C gezeichnet, so geht diese nach der Abwicklung in eine andere Linie über, welche

die Verwandelte heißt. Da die Winkel, unter welchen die einzelnen Elemente der Curve C die Mantellinien der Cylinderfläche schneiden, auch nach der Abwicklung dieselben bleiben, so muß z. B. diejenige Curve, welche man als Durchschnitt einer zu den Mantellinien senkrechten Ebene (Normalebene) erhält, nach der Abwicklung der Fläche eine Gerade sein, da alle Elemente des Normalschnittes senkrecht auf den Mantellinien stehen. Oder: Die Verwandelte des Normalschnittes ist stets eine zu den Mantellinien senkrechte Gerade.

§. 57.

Die Abwicklung des Cylinders r' t' t'' r'' (Fig. 98, Taf. IV), dessen Grund- und Deckfläche Normalschnitte sind, ist dem vorigen §. zufolge ein Rechteck (Fig. 99, Taf. IV), dessen Höhe A R gleich der Höhe des Cylinders und dessen Breite A A gleich der Verstreckung der Grundfläche, d. h. gleich dem Umfang des Kreises a b c d ist.

Um die Verwandelte des schiefen Schnittes a' d' zu erhalten, zeichne man eine Anzahl von Mantellinien in der Abwicklung (indem man $AD = \text{arc } ad$, $DC = \text{arc } dc$, $CB = \text{arc } cb$ .... und A R, D S, C T.... senkrecht auf A A macht) schneide auf denselben die Längen $AA_0 = a'r'$, $DD_0 = d's'$, $CC_0 = c't'$.... ab und verbinde die Endpunkte A_0, D_0, C_0, B_0 ... durch eine stetige Curve; die Fläche $AA_0C_0A_0A$ ist sodann die Abwicklung des abgestumpften Cylinders r' t' c' a' (Fig. 98).

§. 58.

Hat die Cylinderfläche eine zu beiden Grundebenen schräge Lage, und ist sein Normalschnitt nicht gegeben, so muß man sich diesen zum Zweck der Abwicklung der Fläche stets verschaffen.

1) Es soll die Abwicklung des schief abgeschnittenen Cylinders (a b c d e f, a' d' e' b') gezeichnet werden (Fig. 100, Taf. V).

Man zeichne zuerst den Normalschnitt a c'', indem man sich den Cylinder verlängert denkt. Klappt man die Schnittebene a c'' in die G.T. um, so ist offenbar b'' b''' = b' 2;

g'' g''' = g' 1; i'' i''' = i' 3 .... zu machen, und die Punkte a, g''', b''', i''' .... durch eine Curve ſtetig zu verbinden.

In der Abwicklung iſt die Verwandelte des Normalſchnittes a c'' eine Gerade, deren Länge gleich der Curve a g''' b''' i''' c'' iſt; macht man zugleich A G_0 = arc a g''', G_0 B_0 = arc g''' b''', B_0 C_0 = arc b''' i''' .... und zieht durch A, G_0, B_0, J_0, C_0 Linien ſenkrecht zu A C_0, ſo ſind dies in der Abwicklung die Mantellinien des Cylinders, welche durch die Punkte a, g'', b'', i'', c'' gehen. Da dieſelben parallel zur G.T., ſo ſind ihre G.Riſſe zugleich ihre wahren Längen. Macht man daher A F = a f, G_0 G = g'' g, B_0 B = b'' b, J_0 J = i'' i u. ſ. f. und verbindet die Punkte A, G, B, J, C durch eine ſtetige Curve, ſo iſt dies die Verwandelte des Schnittes a c.

Iſt f d ‖ a c, ſo iſt auch a f = g h = b e = i k .., folglich hat man nur die Längen A F, G H, B E, J K, C D = a f zu machen; die Curve F H E K D iſt ſodann die Verwandelte von f d und das Flächenſtück A C D F die Abwicklung des ſchräg geſchnittenen Cylinders.

Bemerkung. Daß man den Normalſchnitt auch in m n oder an einer beliebigen anderen Stelle hätte annehmen können, iſt ſelbſtverſtändlich; man hätte dann eben M_0 A = m a, M F = m f, O G = o g, O H = o h..... machen müſſen.

2) Es ſoll die Abwicklung des Cylinders (a e f k, a' c' g' f' k') gezeichnet werden. (Fig. 101, Taf. V.)

Man projicire den Cylinder auf eine zur Richtung der Mantellinien parallele Seitenebene T T und klappe dieſe in die G.T. um. Man erhält z. B. die Seitenriſſe a'', b'', c''.... wenn man a a'', b b'', c c''...⊥ T T zieht und 1'' a'' = 1 a', 2'' b'' = 2 b', 3'' c'' = 3 c' .... macht. Die Spur der zu den Mantellinien ſenkrechten Ebene (der Normalebene) ſei S S''; ſie ſchneidet die Mantellinien a'' k'', b'' i'', c'' h''... in den Punkten m'', n'', p'', o''..... Dreht man die Normalebene S S'' um S, bis ſie die zur G.T. parallele Lage S S''' einnimmt, ſo erhält man im

G.Riß die wahre Größe und Gestalt des Normalschnittes m n‴ o‴ p‴ q‴. Die Verwandelte dieser Curve ist in der Abwicklung eine Gerade M Q; macht man zugleich M N = arc mn‴, N O = arc n‴ o‴, O P = arc o‴ p‴‴ ....., zieht durch M, N, O, P.. Linien senkrecht zu M Q, macht M A = m″ a″, N B = n″ b″, O C = o″ c″ ... M K = m″ k″ und verbindet die Punkte A, B, C, D.... durch eine stetige Curve, so ist dies die Verwandelte von (a b c d e, a′ b′ c′ d′ e′). Da die Mantellinien durchweg gleiche Länge = f c″ haben, so mache man A K = B J = C H ... = f c″; zeichnet man nun noch die stetige Curve K J H G F, so ist die Fläche A E F K die verlangte Abwicklung.

II. Kegelflächen.

§. 59.

Bewegt sich eine Gerade so, daß sie, während sie durch einen Punkt A geht, eine beliebige Curve E fortwährend schneidet, so entsteht eine Kegelfläche. Die Gerade L heißt die Erzeugende, die Curve E die Leitlinie, der Punkt A die Spitze der Kegelfläche. Jede einzelne Lage der Erzeugenden heißt eine Mantellinie.

Ist die Leitlinie eine ebene Curve, so darf der Punkt A nicht in dieser Ebene liegen, weil sonst eine Ebene statt der Kegelfläche entstünde; dasselbe findet statt, wenn die Leitlinie eine Gerade ist. Liegt der Punkt A in unendlicher Entfernung, so entsteht eine Cylinderfläche.

Die Schnitte einer Kegelfläche mit der Grundebene heißen Spuren.

Wird eine Kegelfläche durch parallele Ebenen geschnitten, so sind alle Schnitte einander ähnlich; geht eine Schnittebene durch die Spitze des Kegels, so schneidet sie ihn in Mantellinien.

§. 60.

1) Die Spitze (s, s') und die Leitlinie einer Kegelfläche sind gegeben; man soll eine beliebige Mantellinie zeichnen (Fig. 102, Taf. V).

Verbinde einen beliebigen Punkt (m, m') der Leitlinie mit der Spitze (s, s') durch eine Gerade, so ist dies eine Mantellinie.

2) Von einem auf einer Kegelfläche liegenden Punkt ist der Grundriß p gegeben, man soll den Aufriß dazu finden (Fig. 102, Taf. V).

Zeichne die durch p gehende Mantellinie (s m, s' m'), dann liegt der A.Riß p' auf dem A.Riß s' m' derselben.

3) Die Spuren einer Kegelfläche zu zeichnen, wenn deren Spitze (s, s') und Leitlinie gegeben ist. (Fig. 102, Taf. V.)

Bestimme die G. und A.Spuren einer hinreichenden Anzahl von Mantellinien und verbinde sie durch stetige Curven.

§. 61.

Berührungsebene an Kegelflächen.

Die Berührung einer Kegelfläche durch eine Ebene geschieht stets längs einer Mantellinie; da alle Mantellinien durch die Kegelspitze gehen, so gehen auch alle Berührungsebenen durch sie.

Die Spuren einer Berührungsebene an die Kegelfläche sind Tangenten an die gleichnamigen Spuren der Fläche; sie berühren die Kegelspuren in den Spuren der berührten Mantellinien.

1) Die Spur und die Spitze (s, s') einer Kegelfläche ist gegeben; man soll die Spuren einer Ebene zeichnen, welche die Kegelfläche im Punkt (c, c') berührt (Fig. 103, Taf. V.)

Zeichne die durch den Punkt (c, c') gehende Mantellinie (a s, a' s') und ziehe eine Tangente O P in a an die Grundrißspur des Kegels, so ist O P die G.Spur der Berührungsebene; ihre Aufrißspur geht durch die A.Spur b' der berührten Mantellinie (a s, a' s'), und durch den Punkt in welchem O P den Grundschnitt trifft. Liegt dieser Punkt

außerhalb des Zeichnungsblattes, so zeichne man eine beliebige Gerade, welche in der Berührungsebene liegen muß, z. B. (t s, t'' s'), ihre A.Spur t' mit b' verbunden, gibt die A.Spur O' P' der Berührungsebene.

2) Durch einen außerhalb der Kegelfläche liegenden Punkt (d, d') eine Berührungsebene an dieselbe zu legen. (Fig. 103, Taf. V.)

Verbinde den Punkt (d, d') mit der Spitze (s, s') durch eine Gerade (d s, d' s'), ziehe durch die G.Spur t dieser Geraden eine Tangente O P an die G.Spur der Kegelfläche, so ist dieß die G.Spur der gesuchten Berührungsebene; ihre Aufrißspur erhält man auf gleiche Weise wie in Nro. 1 angegeben ist.

3) Eine Berührungsebene an eine Kegelfläche zu zeichnen, welche mit einer gegebenen Geraden (m n, m' n) parallel ist. (Fig. 103, Taf. V.)

Ziehe durch die Kegelspitze eine zu (m n, m' n') parallele Gerade (d t, d' t') und durch deren G.Spur t eine Tangente O P an die G.Spur der Kegelfläche, so ist dies die G.Spur der verlangten Berührungsebene; ihre A.Spur findet sich wie oben.

§. 62.

1) Den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene P O P' zu zeichnen.

a) Bestimme die Durchschnittspunkte einer hinreichenden Anzahl von Mantellinien mit der Ebene P O P' und verbinde deren Risse durch stetige Curven.

b) Zieht man durch die Spitze des Kegels eine zur G.Spur O P parallele Gerade (m n, m' n') (Fig. 104, Taf. V), so ist die G.Spur jeder Ebene, welche durch (m n, m' n') geht, parallel zu O P; ihre Aufrißspuren gehen alle durch die A.Spur n' der Geraden M N. Ist z. B. E F E' eine solche Ebene, so schneidet sie offenbar die Ebene P O P' in der Geraden (c d, c' d') (s. §. 19, 10 b), und die Kegelfläche in den durch a und b gehenden Mantellinien (b s, b' s') und

(a s, a' s'), deren Schnittpunkte (p, p') und (q, q') mit (c d, c' d') nothwendig Punkte der gesuchten Schnittcurve sein müssen.

Die wahre Größe der Schnittcurve erhält man durch Umklappung der Ebene P O P' um eine ihrer Spuren.

2) Den Schnittpunkt einer Geraden M N mit einer Kegelfläche zu finden.

a) Man lege durch M N eine beliebige Ebene E und zeichne deren Schnitt mit der Kegelfläche; diejenigen Punkte, in welchen die Risse der Geraden M N die Risse der Schnittcurve schneiden, sind die gesuchten Schnittpunkte.

b) Anstatt die Ebene E beliebig anzunehmen, gebe man ihr eine solche Lage, daß sie zugleich durch die Kegelspitze geht, weil sie dann den Kegel in Mantellinien schneidet. Diejenigen Punkte, in welchen die Risse der Geraden M N diese Mantellinien schneidet sind die gewünschten Schnittpunkte.

§. 63.

Abwickelung der Kegelflächen.

(a b c d, a' c' s') (Fig. 105, Taf. V) sei ein Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis und dessen Axe (s, b' s') im Mittelpunkt der Grundfläche auf ihr senkrecht steht. Denken wir uns den Mantel des Kegels bei (c s, c' s') aufgeschnitten und abgewickelt, so muß offenbar die Verwandelte des Grundkreises a b c d wieder ein Kreis c A B C D und zwar vom Halbmesser c' s' sein; denn die Mantellinien des Kegels haben durchweg gleiche Länge, und zwar die der Linie (c' s'), da die Linie (c s, c' s') parallel zur A.T. ist. Verstreckt man nun den Grundkreis a b c d auf dem Bogen c B A D C, d. h. macht man diesen Bogen gleich dem Umfang des Kreises a b c d, und zieht C s', so ist die Fläche c' s' C D A B c' die Abwicklung des Kegelmantels.

Wird der Kegel durch die zur A.T. senkrechte Ebene P O P' in der Curve m n o p geschnitten und soll die Verwandelte dieser Schnittcurve in der Abwicklung verzeichnet werden, so übertrage

man eine Anzahl von Mantellinien s' B, s' E, s' A, s' D... in die Abwicklung, indem man arc c' B = arc c b; arc B E = arc b e; arc A E = arc e a .... macht, schneide von s' aus die Längen s' O, s' N, s' G.... gleich den wahren Längen von (s o, s' o'), (s n, s' n') (s g, s' g')... ab und verbinde die Punkte O N G M P O durch eine stetige Curve; letztere ist sodann die Verwandelte des Schnittes m g n o p, und die Fläche o' M O C A c' die Abwicklung des abgestumpften Kegels a' c' o' m'.

§. 64.

Steht die Axe der Kegelfläche schief auf der Grundfläche, oder ist die Grundfläche derselben kein Kreis, sondern eine beliebige Kurve (Fig. 106, Taf. V), so kann die Abwicklung auf folgende Weise ausgeführt werden.

Man zeichne eine Anzahl von Mantellinien (a s, a' s'), (b s, b' s'), (c s, c' s').... und zwar in solchen Entfernungen von einander, daß die Bogenstücke a b, b c, c d.... als gerad angenommen werden können, bestimme die wahre Größe der Dreiecke a b s, b c s, c d s.... (indem man den Kegel als eine Pyramide betrachtet, deren Grundfläche ein Polygon mit den Seiten a b, b c, c d... ist) und reihe diese Dreiecke A B S, B C S, C D S.... in entsprechender Weise an einander.

Daß übrigens dieses Verfahren nur ein annäherungsweise richtiges Resultat liefert, ist klar. Ein genaues Verfahren, das Netz einer beliebigen Kegelfläche zu zeichnen, werden wir weiter unten (§. 67, 6) kennen lernen.

III. Umdrehungsflächen.

§. 65.

Denkt man sich eine beliebige gerade oder krumme Linie L mit einer Geraden T fest verbunden und nun um T als Axe gedreht, so beschreibt die Linie L eine Fläche, welche man Umdrehungsfläche heißt.

Aus der Entstehungsart dieser Flächen ergibt sich unmittelbar

Folgendes: jeder Punkt der Linie L, welche die Erzeugende heißt, beschreibt bei der Umdrehung einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Geraden T, der Drehungsaxe ist; der Halbmesser des Kreises ist gleich der Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe. Jede Ebene senkrecht zur Axe schneidet demnach die Fläche in einem Kreis, Parallelkreis. Theilt ein Parallelkreis die Fläche in zwei congruente Hälften, so nennt man ihn einen Aequator. Der Aequator ist daher ein größter oder ein kleinster Parallelkreis.

Schneidet man eine Umdrehungsfläche durch Ebenen, welche durch die Drehungsaxe gehen, so sind alle diese Schnitte congruent und heißen Meridiane. Ist die Axe senkrecht zur G.T., und schneidet man die Umdrehungsfläche durch eine Ebene, welche parallel zur A.T. ist und durch die Drehungsaxe geht, so ist der so erhaltene Schnitt ein Hauptmeridian; er ist zugleich der vertikale Umriß der Fläche; ferner ist in diesem Fall der G.Riß jedes Meridians eine durch den G.Riß der Axe gehende Gerade, die G.Risse aller Parallelkreise sind concentrische Kreise um den G.Riß der Axe als Mittelpunkt, ihre Radien sind den Radien der Parallelkreise in Wirklichkeit gleich; ihre A.Risse sind zum Grundschnitt parallele Gerade.

§. 66.

Besondere Arten von Umdrehungsflächen.

Ist die Erzeugende L eine zur Axe parallele Gerade, so entsteht der gerade Cylinder, Drehungscylinder, dessen Axe die Drehungsaxe und dessen Normalschnitt ein Kreis ist; schneidet die Gerade L die Axe in einem Punkt S, so entsteht der gerade Kegel, Drehungskegel; schneidet die Gerade L die Axe unter einem rechten Winkel, so erzeugt sie eine Ebene; ist die Gerade L schräg zur Axe, ohne sie zu schneiden, so erzeugt sie das Drehungshyperboloid.

Dreht man einen Kreis um einen seiner Durchmesser, so entsteht die Kugelfläche; dreht man den Kreis um eine außerhalb desselben (aber in seiner Ebene) liegende Gerade, so entsteht die

Wulstfläche; durch Drehung der Elipse um eine ihrer Axen entsteht das Drehungselipsoid.

§. 67.

1) Die Curve (a b c d e, a' b' c' d' e') sei die Erzeugende, (s, s' s'') die Axe einer Umdrehungsfläche, x der G.Riß eines auf ihr liegenden Punktes man soll den durch x gehenden Meridian zeichnen. (Fig. 107, Taf. V.)

Der G.Riß des Meridians ist die durch s und x gehende Gerade s t; s t ist als die Spur der Meridianebene zu betrachten. Die durch die Punkte a, b, c, d, e gehenden Parallelkreise, werden von der Ebene s t in den Punkten m, n, o, p, q geschnittten, deren A.Risse auf den A.Rissen a' a'', b' b'', c' c'' ... dieser Parallelkreise, also in m', n', o', p', q' liegen müssen. Verbindet man diese Punkte durch eine stetige Curve, so ist dies der A.Riß des durch x gehenden Meridians.

2) Zu dem G.Riß n eines auf einer Umdrehungsfläche liegenden Punktes den A.Riß zu finden (Fig. 107, Taf. V).

Der durch n gehende Parallelkreis n b schneidet die Erzeugende in b (d. h. dieser Parallelkreis wird bei der Umdrehung vom Punkt b der Erzeugenden beschrieben). Der A.Riß dieses Parallelkreises ist die Gerade b' b'', auf ihr muß demnach der zum G.Riß gehörige A.Riß n' liegen.

3) Man soll den A.Riß der Erzeugenden zeichnen, nachdem sie bei der Drehung im Grundriß die Lage $a^0 b^0 c^0 d^0 e^0$ eingenommen hat (Fig. 107, Taf. V).

Der A.Riß a_0' des Punktes a_0 liegt auf dem A.Riß a' a'' des Parallelkreises $a\,a_0$, der A.Riß b_0' des Punktes b_0 auf dem A.Riß b' b'' des Parallelkreises $b\,b_0$ u. s. f. die stetige Verbindung der Punkte a_0' b_0' c_0' d_0' ... durch eine stetige Curve ist der gewünschte A.Riß der Erzeugenden.

§. 68.

1) Den Schnitt einer Ebene P O P' mit einer Umdrehungsfläche zu bestimmen. (Fig. 108, Taf. V.)

Die mit der G.T. parallele Hilfsebene c' d' schneidet die Umdrehungsfläche in dem Parallelkreis (e f, e' f') und die Ebene P O P' in der zu ihrer Spur O P parallelen Geraden c d; die beiden Punkte (a, a') und (b, b') müssen demnach Punkte der Schnittcurve sein, da sie beiden Flächen gemeinschaftlich angehören. Durch wiederholte Anwendung von horizontalen Hilfsebenen kann man sich nun eine hinreichende Anzahl von Punkten verschaffen, welche der Schnittcurve angehören.

Die wahre Größe dieser Schnittcurve erhält man durch einfache Umklappung der Ebene P O P' um eine ihrer Spuren.

2) Den Schnitt einer Geraden (m n, m' n') mit einer Umdrehungsfläche zu finden. (Fig. 108, Taf. V.)

Man lege durch die Gerade eine Ebene, am besten eine der beiden Reißebenen, z. B. die Reißebene m n; diese schneidet die Fläche in der Curve (h i, h' g' i'). Der Punkt (g, g') in welchem die Gerade (m n, m' n') die mit ihr in derselben Ebene liegende Schnittcurve h' g' i' trtfft, ist der gesuchte Schnittpunkt.

Bemerkung. Dieses allgemeine Verfahren: den Schnitt einer Geraden mit jeder beliebigen Fläche zu finden, haben wir oben schon mehrfach erwähnt und angewendet, so z. B. §. 35, 4; §. 55, 4, a; §. 61, 4, a. In vielen Fällen läßt sich jedoch dasselbe vereinfachen durch eine der Eigenthümlichkeit der Fläche entsprechende Lage der Hilfsebene, wie z. B. §. 55, 4, b; §. 61, 4, b.

Hat man es z. B. mit Cylinderflächen zu thun, so wird man die zu den Constructionen nöthige Hilfsebene parallel zu den Mantellinien der Cylinderfläche annehmen, bei Kegelflächen wird man sie durch die Spitze derselben gehen lassen, bei Drehungsflächen senkrecht zur Axe legen u. s. f., weil in den beiden ersten Fällen die Schnitte der Hilfsebenen mit den betreffenden Flächen gerade Linien (nämlich Mantellinien), im letztern Fall Parallelkreise sind, die sich immer leichter,

rascher und mit größerer Genauigkeit zeichnen lassen als andere Schnittcurven.

3) Den Schnitt einer Geraden (m n, m' n') mit einem Drehungskegel zu zeichnen. (Fig. 109, Taf. V.)

Anstatt durch (m n, m' n') eine beliebige Ebene zu legen, geben wir ihr eine solche Lage, daß sie zugleich durch die Spitze (s, s') des Kegels geht. Wir verbinden zu diesem Zweck einen beliebigen Punkt (a, a') auf (m n, m' n') mit (s, s') durch eine Gerade (a s, a' s') und legen durch (a s, a' s') und (m n, m' n') eine Ebene; ihre G.Spur ist die durch die Spuren p und t gehende Gerade O P; diese schneidet die G.Spur des Kegels in b, also die Kegelfläche selbst in der Mantellinie (b s, b' s') und da diese mit (m n, m' n') in derselben Ebene liegt, so müssen sie sich in (c, c') schneiden; (c, c') ist daher der Schnittpunkt der Geraden (m n, m' n') mit der Kegelfläche.

4) Den Schnitt einer Geraden (m n, m' n') mit einer Kugel zu finden. (Fig. 110, Taf. V.)

Jede Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis, also ist auch der Schnitt b e der Reißebene m n ein Kreis. Nimmt man eine zu m n parallele Seitenebene S T an, so projicirt sich der Schnittkreis b e auf sie in seiner wahren Größe, sein Durchmesser ist gleich b e und sein Mittelpunkt o'' liegt in der Senkrechten o o'', seine Entfernung f'' o'' von S T gleich f o'. Die Projektion der Geraden M N auf die Seitenebene erhält man dadurch, daß man die Seitenrisse zweier Punkte derselben zeichnet. Die Spur s der Geraden M N projicirt sich auf die Seitenebene in s''; der auf M N beliebig angenommene Punkt (a, a') in a''; folglich ist die Gerade s'' a'' der Seitenriß von M N. Diese schneidet den Seitenriß e'' b'' des Schnittkreises e b in c'' und d'', deren G.Riß c und d und deren Aufriß c' und d' ist. Die Punkte (c, c') und (d, d') sind demnach die gesuchten Schnittpunkte.

5) Den Schnittpunkt einer durch den Mittelpunkt der Kugel

gehenden Geraden (m n, m' n') mit deren Oberfläche zu finden. (Fig. 110 a, Taf. V.)

Die Reißebene m n schneidet die Kugel in dem größten Kreis a p. Drehen wir diese Reißebene um die Axe der Kugel (d. um den zur G.T. senkrechten Durchmesser) bis sie die zur A.T. parallele Lage p'' a'' einnimmt, so ist offenbar der vertikale Umriß der Kugel der Aufriß des größten Kreises a'' p''. Der Punkt (p, p') auf der Geraden (m n, m' n') erhält nach dieser Drehung die Lage p'' p''' und die Linie (m n, m' n') die Lage (o p'', o' p'''); o' p''' schneidet den Kugelumriß in g'; bringt man die Gerade o' p''' in ihre ursprüngliche Lage o' p' zurück, so kommt der Punkt g' nach b'; folglich ist (b, b') der gesuchte Schnittpunkt.

§. 69.

Tangenten und Berührungsebenen an Umdrehungsflächen.

Die Tangente f' s' am Punkt a' des Meridians c' a' d' der Umdrehungsfläche (Fig. 111, Taf. V) beschreibt bei der Drehung offenbar eine Kegelfläche, welche die Umdrehungsfläche im Parallelkreis (a b e, a' b') berührt; jede Mantellinie jenes Kegels ist demnach eine Tangente an die Umdrehungsfläche und zwar in demjenigen Punkt, in welchem sie den Parallelkreis a' e' schneidet; so z. B. ist (s b t, s' b' t') Tangente an der Umdrehungsfläche im Punkt (b, b').

Ebenso muß auch die Gerade v w, welche den Parallelkreis a b e in b berührt, Tangente im Punkt (b, b') der Umdrehungsfläche sein; da v w in der Ebene des Parallelkreises liegt, so fällt ihr A.Riß mit a' e' zusammen.

Nach §. 51, 3 muß diejenige Ebene, welche durch die beiden Tangenten (s t, s' t') und (v w, a' e') geht, die Umdrehungsfläche im Punkt (b, b') berühren; die Spuren dieser Berührungsebene sind daher leicht zu finden (s. §. 18). Die G.Spur O P geht nämlich durch die G.Spur der einen Tangente und ist parallel zum G.Riß v w der anderen Tangente, da diese zur G.T. parallel

ist; die Aufrißspur O′ P′ geht durch die beiden A.Spuren der Tangenten.

§. 70.

Errichtet man auf der Berührungsebene einer krummen Fläche im Berührungspunkt eine Senkrechte, so ist dieselbe eine Normale der Fläche. Jede Normale auf einer Umdrehungsfläche schneidet die Drehungsaxe, denn sie liegt immer in einer Meridianebene. Ist f′ p‴ g′ (Fig. 111 a, Taf. VI) der Meridian einer Umdrehungsfläche und ist p‴ s′ eine Normale im Punkt p‴ des Meridians, so beschreibt p‴ s′ bei der Umdrehung eine Kegelfläche, welche die Umdrehungsfläche im Parallelkreis p‴ h′ schneidet; jede Mantellinie dieses Kegels ist eine Normale auf der Umdrehungsfläche in demjenigen Punkt des Parallelkreises p‴ h′, in welchem diese Mantellinie den Parallelkreis trifft.

Soll an die Umdrehungsfläche, deren Meridian die Curve g′ p‴ f′ ist, eine Berührungsebene parallel zu einer gegebenen Ebene P O P′ gelegt werden, so zeichne man zunächst die Risse einer Linie (a b, a′ b′), welche auf P O P′ senkrecht steht, und bringe sie in die zur A.T. parallele Lage (a b″, a′ b‴); zieht man nun eine Normale s′ p‴ zum Meridian g′ p‴ f′ parallel zu a′ b‴ (was am Besten mit Hilfe der mit c′ d′ parallelen Tangente m′ n′ geschehen kann), so ist s′ die Spitze eines Drehungskegels, dessen Mantellinien im Parallelkreis p‴ h′ senkrecht auf der Umdrehungsfläche stehen. Diejenige von diesen Mantellinien p′ s′, welche mit a′ b′ parallel ist, ergibt nun in p′ den Aufriß des Punktes in welchem die verlangte Ebene die Fläche berührt, sein G.Riß liegt in p auf dem G.Riß des Parallelkreises p‴ h′. Legt man nun durch den Punkt (p, p′) eine zu P O P′ parallele Ebene, so ist dieß die verlangte Berührungsebene.

§. 71.

An eine Umdrehungsfläche (Fig. 122, Taf. VI) eine Berührungsebene zu legen, welche mit einer gegebenen Linie (m n, m′ n′) parallel ist.

Gibt man der Geraden (m n, m' n') die zur A.T. parallele Lage (n m'', n' m'''), zieht an den Hauptmeridian eine damit parallele Tangente (s a'', s' a''') und bringt diese in dieselbe Lage, welche (n m'', n' m''') ursprünglich hatte, d. h. macht man (s a, s' a') parallel (m n, m' n'), so geht die verlangte Berührungsebene durch diese Gerade (s a, s' a') zugleich aber auch durch die Tangente (p q, p' q') im Punkt (a, a') des Parallelkreises (a'' a, a''' a'). Verbindet man daher die gleichnamigen Spuren dieser beiden Tangenten durch gerade Linien, so sind dies die Spuren der Berührungsebene.

IV. Regelflächen.

§. 72.

Unter Regelflächen versteht man alle diejenigen Flächen, welche durch Bewegung einer Geraden entstehen. Die bewegliche Gerade heißt die Erzeugende, jede einzelne Lage derselben eine Mantellinie.

Liegen zwei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden in einer Ebene, so sind sämmtliche Elemente der Fläche eben; eine solche Fläche kann daher in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt werden.

Liegen zwei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden nicht in einer Ebene, so ist es auch nicht möglich die Fläche zu entwickeln, solche Flächen heißen windschief, während man die ersteren entwickelbare Flächen nennt.

Aus obigen Erklärungen geht hervor, daß auch die Cylinder- und Kegelflächen zu den Regelflächen zu zählen sind und zwar zu der Gattung der entwickelbaren gehören.

§. 73.

a) Windschiefe Flächen.

Es sind gegeben zwei gerade Linien (m n, m' n') und (p q, p' q') (Fig. 113, Taf. VI) als Leitlinien; eine dritte Gerade (a b,

a' b') bewegt sich so, daß sie die beiden ersten schneidet, während sie mit der G.T. stets parallel bleibt.

Bei dieser Bewegung erzeugt die Gerade (a b, a' b') eine windschiefe Fläche, (hyperbolisches Paraboloid). Einzelne Lagen der Erzeugenden, wie z. B. (c d, c' d'), (e f, e' f') . . . sind leicht darzustellen, da ihre A.Risse zum Grundschnitt parallele Gerade sind.

Jede Ebene welche parallel mit den beiden Leitlinien M N und P Q ist, schneidet die Fläche in einer Geraden. Diejenige Ebene, mit welcher die Erzeugende parallel ist (im vorliegenden Fall die G.T.) heißt Richtebene; jede mit der Richtebene parallele Ebene schneidet die Fläche ebenfalls in einer Geraden, nämlich in einer Lage der Erzeugenden oder in einer Mantellinie. Durch jeden Flächenpunkt A lassen sich demnach stets zwei gerade Linien ziehen, aber auch nur zwei; die durch dieselben gehende Ebene ist Berührungsebene an die Fläche im Punkt A (s. §. 51, 3).

Schneidet man die Fläche durch eine Ebene, welche weder mit der Richtebene noch mit den beiden Leitlinien parallel ist (z. B. durch die zur A.T. parallele Ebene q' k'), so ist jeder so erhaltene Schnitt eine krumme Linie.

§. 74.

Eine Gerade bewegt sich so, daß sie drei Linien fortwährend schneidet, nämlich den Kreisbogen (a b c d, a' b' c' d), den Kreisbogen (c f g h, e' f' g' h') und die Gerade (s s'', s') (Fig. 114, Taf. VI); die dadurch erzeugte Fläche gehört zu denjenigen, welche man mit dem Namen conoidische bezeichnet.

Da die Gerade (s s'', s') senkrecht zur A.T. ist, so gehen sämmtliche A.Risse der Erzeugenden durch den Punkt s'. So z. B. b' s', sie schneidet die beiden andern Leitlinien, d. h. die Bögen a' b' c' d' und e' f' g' h' in (b, b') und (f, f'), folglich ist (f, b f' b') eine Mantellinie der Fläche.

Ist v w die G.Spur einer zur G.T. senkrechten Ebene, so erhält man deren Schnitt mit der Fläche, wenn man die Schnittpunkte einzelner Mantellinien mit jener Ebene zeichnet, und sie durch eine stetige Curve verbindet; die Mantellinie (f b, f' b') z. B.

schneidet die Ebene v w in (t, t'); folglich ist (t, t') ein Punkt der Schnittcurve e' A' b' u. s. f.

Bemerkung. Die genannte Fläche, welche in der Baukunst bei bogenförmigen Fenster- und Thüröffnungen öfters vorkommt ist dort unter dem Namen Kernbogen bekannt.

Schraubenflächen.

§. 75.

Ein rechtwinkliges Dreieck (a b, a' b' s') (Fig. 115, Taf. VI) bewegt sich so, daß es sich mit der Kathete b' s' in der Geraden (s, s' s'') fortschiebt, während es sich zugleich proportional mit dieser Verschiebung um die Gerade (s, s' s'') dreht. Bei dieser Bewegung erzeugt sowohl die Hypotenuse a' b', als auch die Kathete a' s' eine eigenthümliche Fläche, welche man mit dem Namen Schraubenflächen bezeichnet; die von der Kathete a' s' erzeugte Fläche heißt auch Wendelfläche. Die Spitze (a, a') des Dreiecks beschreibt eine gewundene Curve, deren G.Riß der um s mit dem Halbmesser a' s' beschriebene Kreis und deren A.Riß die Curve a' b' c' d' e' .... a'' ist, und welche man Schraubenlinie nennt.

Hat sich das Dreieck (a s, a' b' s') einmal um die Axe (s, s' s'') gedreht und die Lage a s, a'' b'' s'' erreicht, so hat es einen Umgang der Schraubenfläche erzeugt, und der Punkt a hat einen Umgang der Schraubenlinie beschrieben. Die Höhe a' a'' heißt die Ganghöhe der Schraubenlinie oder Schraubenfläche; der Kreis a c e g heißt der Grundkreis der Schraubenlinie. Da alle Punkte der Schraubenlinie gleiche Entfernung von der Axe haben, so liegen sie auf einem Cylinder, dessen Mantellinien die Reißlote jener Punkte sind, und welcher der Schraubencylinder heißt.

§. 76.

Der G.Riß x eines Punktes der Schraubenfläche (Fig. 115, Taf. VI) ist gegeben, man soll den A.Riß dazu finden.

Zieht man im G.Riß durch x die Gerade s d, so ist dies die durch x gehende Lage der Erzeugenden. Der im

vorigen §. besprochenen Entstehungsart der Fläche zufolge muß das Dreieck (a s, a' b' s'), nachdem es sich um den Bogen a b c d gedreht hat, auf eine Höhe s' k'' an der Axe sich hinaufgeschoben haben, welche zur ganzen Ganghöhe s' s''' sich verhält, wie der Bogen a b c d zum ganzen Umfang des Grundkreises; d. h. ist der Bogen a b c d z. B. $^3/_8$ vom Umfang des Grundkreises, so ist auch s' k'' = $^3/_8$ s' s'''. Zieht man nun k'' d' senkrecht zur Axe, bringt den Punkt d nach d' in den Aufriß, macht k'' k' = s' b' und zieht k' d', so ist k'' d' k' der A.Riß des die Schraubenfläche erzeugenden Dreiecks in der Lage s d; auf der Hypotenuse k'' d' liegt nun der Aufriß x' zu dem gegebenen Grundriß x.

Bemerkung. Sollte der Punkt X auf der Wendelfläche liegen, so wäre offenbar der auf der Kathete k'' d' liegende Punkt x'' der gesuchte Aufriß zu x.

§. 77.

Betrachtet man die Axe (s, s' s'') als die Axe concentrischer Cylinder, so schneiden diese die Schraubenfläche in Schraubenlinien, deren Ganghöhen alle gleich sind. Jede dieser Schraubenlinien kann nun als Leitlinie für die Erzeugung der Schraubenfläche dienen, wenn man an ihr eine Gerade a' b' fortgleiten läßt, welche die Axe stets unter demselben Winkel α schneidet.

Ist dieser Winkel $\alpha = 90^0$ so entsteht die Wendelfläche.

§. 78.

Zeichnet man die Abwicklung A A''' A' A'' (Fig. 116, Taf. VI) des Schraubencylinders (Fig. 115, Taf. VI), so hat man offenbar A A''' gleich dem Umfang des Grundkreises und A A'' = a a'' zu machen. Um die Verwandelte der Schraubenlinie zu erhalten, hat man A B = arc a b, B C = arc b c, C D = arc c d .... zu machen, in B, C, D .... Senkrechte zu errichten und diesen eine Länge gleich der betreffenden Mantellinie des Schraubencylinders, d. h. B B' = b'' b', C C' = s' c', D D' = d'' d' .... zu machen und die Punkte A, B', C', D' .... stetig mit einander zu verbinden. Nun sind aber die von den einzelnen Punkten der Schrauben-

linie erstiegenen Höhen mit den durchlaufenen Bögen des Grundkreises proportional, folglich verhält sich $AB:BB' = AC:CC' = AD:DD \ldots$. was nur möglich ist, wenn $AB'C'DE' \ldots$. eine Gerade ist. Daraus folgt, daß die Verwandelte der Schraubenlinie in der Abwicklung eine Gerade ist, und zwar ist die Verwandelte eines Umgangs der Schraubenlinie die Hypotenuse AA' eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $A'A$ = der Ganghöhe und dessen andere Kathete AA''' = dem Umfang des Schraubencylinders ist; ferner geht daraus hervor, daß alle Elemente der Schraubenlinie mit den Mantellinien des Schraubencylinders gleiche Winkel einschließen und daß daher jede Tangente an die Schraubenlinie mit der Ebene des Grundkreises denselben Winkel macht.

§. 79.

Denkt man sich das Dreieck $AA'A'''$ (Fig. 116, Taf. VI) etwa aus Papier ausgeschnitten, an den Cylinder $aceg$ (Fig. 115) so angelegt, daß die Seite $A'A'''$ mit der Mantellinie $a'a''$ zusammenfällt, und um den Cylinder von a nach bgf u. s. f. geschlungen, so wird die Spitze A des Dreiecks schließlich mit dem Punkt a, a' zusammenfallen, die Hypotenuse AA' aber ist zur Schraubenlinie $a'c'd'e' \ldots$. geworden.

Nehmen wir an, das Dreieck $AA'A'''$ sei nur um einen Theil $agec$ des Cylinders geschlungen, so wird der nicht aufgewundene Theil ACC' des Dreiecks, die Lage (γc, $\gamma' s' c'$) einnehmen, γc wird Tangente am Grundkreis, und $\gamma' c'$ Tangente an der Schraubenlinie sein, während (γ, γ') die Spur der Tangente ist; zugleich ist die Länge des Grundrisses $c\gamma$ der Tangente = der Länge des abgewickelten Bogens cba. Daraus ergibt sich die Construktion der Tangente an einem beliebigen Punkt der Schraubenlinie z. B. in (d, d'), wenn man nämlich an den Grundkreis in d eine Tangente zieht, und deren Länge $d\delta$ = arc $dcba$ macht; d ist sodann die Grundrißspur der Tangente, und $\delta' d'$ der Aufriß der Tangente in (d, d').

Bemerkung. Bei der Abwicklung des Dreiecks $AA'A'''$

von dem Schraubencylinder liegt das abgewickelte Stück b β, c γ, d δ . . . stets in der Berührungsebene des Cylinders, die Grundlinie des Dreiecks ist Tangente am Grundkreis und hat eine Länge gleich dem abgewickelten Bogen; die Spitze des Dreiecks beschreibt in der Ebene des Grundkreises (G.T.) eine Curve $\alpha\beta\gamma\delta$..., welche offenbar die Evolvente des Grundkreises ist; die Evolvente des Grundkreises ist demnach der geometrische Ort für die G.Spuren der Tangenten an die Schraubenlinie.

§. 80.

In einem gegebenen Punkt (d, d') (Fig. 115, Taf. VI) einer Schraubenfläche an diese eine Berührungsebene zu legen.

Da die Berührungsebene durch die durch (d, d') gehende Mantellinie (s t, k' t') der Schraubenfläche (s. §. 51, 3) und zugleich durch die Tangente (d δ, d' δ') gehen muß, so hat man nur die gleichnamigen Spuren dieser beiden Geraden durch gerade Linien zu verbinden; (so z. B. ist δ t die G.Spur der Berührungsebene).

§. 81.

Man soll im Punkt d d' der Wendelfläche an diese eine Berührungsebene legen (Fig. 115, Taf. VI).

Lege eine Ebene durch die Erzeugende (s d, k'' d') und durch die Tangente (d δ, d' d') im Punkt (d, d') der Schraubenlinie, so ist dieß die gesuchte Berührungsebene. Da die Erzeugende (s d, k'' d') parallel zur G.T. ist, so muß die G.Spur der Berührungsebene die durch δ mit s d parallele Gerade O P sein.

§. 82.

b) Entwickelbare Flächen.

Außer den oben erwähnten Cylinder- und Kegelflächen ist zu den entwickelbaren Flächen noch zu rechnen die sogenannte ent-

wickelbare Schraubenfläche. Sie wird erzeugt durch die an einer Schraubenlinie fortgleitende Tangente oder durch die Bewegung der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks A A' A''', welche dieselbe während der in §. 79 beschriebenen Abwicklung vom Schraubencylinder macht.

Die Evolvente $\alpha\beta\gamma\delta$... (Fig. 115, Taf. VI) des Grundkreises ist offenbar die Grundrißspur der entwickelbaren Schraubenfläche, die G.Spur einer Berührungsebene z. B. im Punkt (d, d') muß daher die Evolvente (und zwar im vorliegenden Fall in δ) berühren und zugleich durch die betreffende Mantellinie der Fläche [d. h. durch die Tangente (d δ, d' δ,) der Schraubenlinie] gehen.

§. 83.

Ein Dreieck (a b, a' b' c') (Fig. 117, Taf. VI) bewegt sich so, daß die Ecke (b, b') stets in der Schraubenlinie (b c d e f..., b' c' d' e' f' ...) sich fortschiebt, während die Seite b' b'' des Dreiecks in die Richtung einer Mantellinie fällt und seine Ebene immer senkrecht auf dem Schraubencylinder bleibt, also in ihrer Erweiterung durch die Axe (s, s' s'') des Cylinders geht. Bei dieser Bewegung erzeugt das Dreieck ein dreieckiges Schraubengewinde.

Die durch die Seite a b und a' b'' des Dreiecks erzeugten Flächen sind nach §. 75 Schraubenflächen und jeder Punkt dieser Linien beschreibt eine Schraubenlinie: alle diese Schraubenlinien haben gleiche Ganghöhe. Die Schraubenlinie b'' c'' d'' e''... hat mit b' c' d' e'... gleiche Ganghöhe und denselben Grundkreis, beide sind daher congruent. Der Punkt a' beschreibt die Schraubenlinie a' m' n' o' p'..., welche mit den vorigen gleiche Ganghöhe hat, ihr Grundkreis ist aber der Kreis a m n o p.

Das Aufzeichnen des dreieckigen Schraubengewindes ist daher einfach, wenn man die genannten Schraubenlinien zeichnet, und sodann an deren äußerste Umrisse die Tangenten b'' a', b' a'..., p' f' und p' f''... zieht.

§. 84.

Auf gleiche Weise erhält man auch die Schraube mit viereckigem Gewinde, wenn man an die Stelle des Dreiecks ein

Rechteck (Quadrat ꝛc.) substituirt, und dasselbe die im vorigen Paragraph beschriebene Bewegung machen läßt (Fig. 118, Taf. VI).

Das viereckige Schraubengewinde ist außerhalb von einer Cylinderfläche begrenzt, während die obere und untere Fläche derselben Wendelflächen sind.

Jeder Eckpunkt des das Gewinde erzeugenden Rechtecks beschreibt eine Schraubenlinie, je zwei derselben haben denselben Schraubencylinder gemeinschaftlich, während alle vier gleiche Ganghöhe haben.

§. 85.

Man kann übrigens dem Schraubengewinde jeden beliebigen Querschnitt geben, und erhält dann jedesmal das Gewinde, wenn man den gegebenen Querschnitt in einer solchen Anzahl verschiedener Lagen zeichnet, daß mit Sicherheit die Ecken desselben durch stetige Curven (Schraubenlinien) verbunden, oder sofern das Querprofil ganz oder theilweis aus krummen Linien besteht, die Umhüllungslinie der verschiedenen Lagen des Querprofils gezeichnet werden kann.

Fig. 119, Taf. VI zeigt ein Beispiel dieser Art, nämlich den Handgriff des Geländers einer gewundnen Treppe.

Schnitte krummer Flächen unter sich.

§. 86.

Schnitt der Cylinder und Kegelflächen.

Im Allgemeinen erhält man die Schnitte von Cylinder und Kegelflächen genau auf dieselbe Weise, d. h. unter Anwendung ähnlicher Hilfsebenen wie oben bei der Durchdringung von Prismen und Pyramiden §. 37 angegeben wurde, indem die Cylinder und Kegel als Prismen oder Pyramiden betrachtet werden können, deren Grundflächen Polygone mit unendlich kleinen und vielen Seiten sind. So wie dort die Schnittfläche (Schnittfigur) gewöhnlich nicht in einer Ebene liegt, so liegt auch im vorliegenden Fall die Schnittcurve gewöhnlich nicht in einer Ebene, ist also eine gewundene Curve.

§. 87.

1) Den Schnitt zweier Cylinder zu zeichnen, welche durch ihre Spuren und die Richtung ihrer Erzeugenden gegeben sind (Fig. 120, Taf. VI).

Schneidet man dieselben durch Ebenen, welche mit den Erzeugenden beider zugleich parallel sind, so werden beide in Mantellinien geschnitten. Da die G.Spuren der Cylinderflächen gegeben sind, so braucht man auch nur die G.Spuren dieser Ebenen zur Construktion. Ist z. B. O P die G.Spur einer solchen Hilfsebene, so schneidet diese die G.Spuren der Cylinder in den Punkten (a, a'), (b, b'), (c, c') und d, d'), folglich schneidet die Ebene die Flächen selbst in den Mantellinien (a m, a' m'), (b n, b' n'), (c p, c' p') und (d q, d' q') die Schnittpunkte (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') dieser Mantellinien sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

2) Den Schnitt zweier Kegelflächen, deren G.Spuren und Spitzen gegeben sind, zu finden (Fig. 121, Taf. VI).

Man schneide die Kegelflächen durch Ebenen, welche durch die beiden Spitzen, also durch eine gerade Linie (s t, s' t') gehen; welche die beiden Spitzen mit einander verbindet. Die Schnitte solcher Ebenen mit den Kegelflächen sind Mantellinien; so z. B. schneidet die Hilfsebene, deren Spur die durch die Spur v der Geraden (s t, s' t') gehende Gerade O P ist, die Kegelflächen in den Mantellinien (a t, a' t'), (b t, b' t'), (c s, c' s'), (d s, d' s') die Schnittpunkte (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') dieser Mantellinien sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

3) Den Schnitt eines Cylinders mit einem Kegel zu zeichnen (Fig. 122, Taf. VI).

Man ziehe durch die Kegelspitze eine Gerade (s v, s' v') parallel zur Richtung des Cylinders und schneide die gegebenen Flächen durch Ebenen, welche durch jene Linie (s v, s' v') gehen; diese schneiden die beiden Kegel in Mantellinien; so

z. B. schneidet die Hilfsebene, deren G.Spur OP ist, die Kegel in den Mantellinien (a m, a' m'), (b n, b' n') (c s, c' s') und (d s, d' s'). Die Schnittpunkte (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') dieser Mantellinien sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

§. 88.

4) Den Schnitt zweier Umdrehungsflächen zu zeichnen, deren Axen senkrecht auf der G.T. stehen (Fig. 123, Taf. VI).

Schneidet man die beiden Flächen durch Ebenen senkrecht zur Axe, z. B. durch die Ebene O' P', so werden beide Flächen in Parallelkreisen a e g und c h k geschnitten, deren Halbmesser a' b' und c' d' sind. Diese beiden Kreise schneiden sich in den Punkten (m, m') und (n, n'); da diese Punkte beiden Flächen gemeinschaftlich sind, so müssen sie nothwendig der Schnittcurve angehören.

5) Den Schnitt eines Cylinders mit einer Umdrehungsfläche zu bestimmen (Fig. 124, Taf. VII).

Schneidet man beide Flächen wieder durch Ebenen, welche zur G.T. parallel sind, wie z. B. durch die Ebene O' P', so wird die Drehungsfläche in dem Parallelkreis (c d, c' d') und der Cylinder in einer seiner Spur e f congruenten Curve m a n geschnitten. Diese Curve erhält man leicht, wenn man eine Anzahl von Mantellinien zeichnet, denselben die Länge = e a gibt, und die Endpunkte stetig mit einander verbindet. Die beiden Punkte, in welchen die Curve m a n und der Parallelkreis c d sich schneiden, gehören wieder der Schnittcurve beider Flächen an.

Bemerkung. Ist die Spur des Cylinders ein Kreis, so ist die Curve m a n ebenfalls ein Kreis von gleichem Halbmesser; zieht man daher die Axe des Cylinders (d. h. eine Linie parallel zu den Mantellinien durch den Mittelpunkt der Spur des Cylinders), so ist der Schnitt jener Hilfsebene mit der Axe des Cylinders stets der Mittelpunkt des Schnittkreises.

§. 89.

6) Den Schnitt eines Kegels, dessen Grundrißspur ein Kreis ist und dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt mit der Kugeloberfläche zu bestimmen und das Netz des abgestumpften Kegels zu zeichnen (Fig. 125, Taf. VII).

a) Durch Ebenen parallel zur G.T. werden wieder wie in den Beispielen des vorigen Paragraphs beide Flächen in Kreisen geschnitten, deren Schnittpunkte der gesuchten Schnittcurve angehören; so z. B. schneidet die Ebene O′ P′ die Kugel im Kreis p q, und den Kegel im Kreis n d m; diese beiden Kreise schneiden sich in den Punkten m und n, welche demzufolge der Schnittcurve angehören müssen.

b) Abwicklung des Kegelmantels. Da die Schnittcurve auf einer Kugeloberfläche liegt, die Mantellinien des in der Kugel liegenden Theils des Kegels Kugelradien sind, ihre Endpunkte demnach durchweg gleiche Entfernung von der Kegelspitze haben, so müssen diese nach der Abwicklung offenbar auf einem Kreisbogen K‴ H‴ K‴ liegen, dessen Radius S‴ K‴ gleich dem der Kugel ist, und dessen Länge gleich der Verstreckung der Schnittcurve ist.

c) Verstreckung der Schnittcurve. (Verstreckung einer gewundenen Curve) die von der Schnittcurve auf die G.T. gefällten Reißlote bilden die Mantellinien eines senkrechten Cylinders k″ h″ h′ k′, dessen Grundfläche der G.Riß k m h n der Schnittcurve ist. Letztere wird nun in der Abwicklung des genannten Cylinders eine Gerade K K″. Macht man nun um K M = k m, M H = m h, H N = h n, ferner die Senkrechte K K′ = k″ k′, M M′ = m″ m′, H H′ = h′ h″ … und verbindet die Punkte K′, M′, H′, N′, . . . durch eine stetige Curve, so ist K′ M′ H′ N′ K′ die Verwandelte der Schnittcurve (d m h n, d′ m′ h′ n′).

d) Trägt man nun die Länge des Curvenstücks K′ M′ von K‴ nach M‴, d. h. macht man arc K″ M‴ = K′ M′, M‴ H‴ = M′ H′, H‴ N‴ = H′ N′ . . . und zieht die Gerade

S‴ K‴, S‴ M‴, S‴ H‴, S‴ N‴, S‴ K‴, so ist der Kreissektor die Abwicklung des innerhalb der Kugel liegenden Stückes des Kegelmantels, zugleich entsprechen die Geraden S‴ K‴, S‴ M‴ .... den Mantellinien s' k', s' m' u. s. f. Man hat demnach nur noch die Verlängerungen derselben, d. h. die Stücke M‴ M^{IV} = (m b, m' b') N‴ N^{IV} = (n c, n' c') u. s. w. zu machen und die so gefundenen Punkte K^{IV} M^{IV} H^{IV} N^{IV} .... durch eine stetige Curve zu verbinden, alsdann ist die Fläche S‴ K^{IV} H^{IV} K^{IV} die Abwicklung des Kegelmantels.

7) Die in der G.T. liegende Gerade p q (Fig. 126, Taf. VII) sei die Axe eines Cylinders d'' c'' n m, die zu seiner Richtung normale Ebene S'' T'' schneidet ihn in einem Halbkreis, dessen Umklappung d'' a'' c'' b'' e'' sei; man soll den Schnitt dieses Cylinders mit der Halbkugel, deren Mittelpunkt (o, o') in der G.T. liegt, zeichnen.

Schneidet man beide Flächen durch Ebene parallel zur G.T., so wird der Cylinder in Mantellinien, die Kugel in Kreisen geschnitten; so z. B. schneidet die Ebene O' P' die Kugel in dem Parallelkreis (s t, s' t'), den Cylinder in den Mantellinien a'' a und b'' b; denn O'' P'' ist die Spur der Ebene O' P' in der Seitenebene S'' T''. (Man erhält diese Spur O'' P'', wenn man O'' P'' parallel zu S'' T'' im Abstand p r'' = o' r' zieht.) Die beiden Mantellinien a'' a''' und b'' b''' werden von dem Parallelkreis s t, der mit ihnen in derselben Ebene liegt, in den Punkten a und b geschnitten, deren A.Risse a' und b' sind; (a, a') und (b, b') sind demnach Punkte der gesuchten Schnittcurve.

Den Scheitelpunkt (c, c') der Schnittcurve liefert die Hilfsebene V W resp. V' W', welche durch den Scheitelpunkt c'' des Normalschnittes gelegt wird.

8) Den Schnitt eines Cylinders mit einer windschiefen Fläche zu bestimmen (Fig. 127, Taf. VII).

(f g, f' g') und (h i, h' i') seien die Leitlinien einer windschiefen Fläche, die Erzeugende sei parallel mit der G.T.;

es sei ferner die in der G.T. liegende Gerade p q die Axe eines Cylinders, die Umklappung seines Normalschnittes d'' e'' um die Spur S'' T'' sei der Halbkreis d'' a'' c'' b'' e''.

Schneidet man beide Flächen durch Hilfsebenen parallel zur G.T., so wird die windschiefe Fläche in einer Erzeugenden, der Cylinder in Mantellinien geschnitten, deren Schnittpunkte der gesuchten Schnittcurve angehören.

Die Hilfsebene O' P', deren Seitenspur die zu S'' T'' parallele Gerade O'' P'' ist, schneidet die windschiefe Fläche in (o p, o' p'). Man erhält den Grundriß o p dieser Mantellinien leicht aus den beiderseitigen Umklappungen der Leitlinien, indem man h i in die mit dem Grundschnitt parallele Lage h i''' bringt und h' mit i' verbindet. Ebenso erhält man andererseits f' g'' als Umklappung der Leitlinie (f g, f' g'). O' P' schneidet nun f' g'' in o'', und h' i'' in p''. Bringt man diese Punkte in ihre ursprüngliche Lage, d. h. im G.Riß von o''' nach o, und von p''' nach p, so ist o p der G.Riß der Mantellinien, deren A.Riß o' p' ist.

Der Cylinder wird von der Hilfsebeue O' P', resp. von O'' P'' in den Mantellinien a'' a und b'' b geschnitten. Die Punkte a und b, in welchen o p von a'' a und b'' b getroffen wird, gehören der gewünschten Schnittcurve an.

9) Die in der G.T. liegende Gerade h p (Fig. 128, Taf. VII) sei die Axe eines Cylinders; der Halbkreis g h''' m sei der in die G.T. umgeklappte Normalschnitt desselben; (n s, n' s') sei die Axe eines zweiten mit der A.T. parallelen Cylinders; bringt man seinen Normalschnitt n' o^{IV} in die zur G.T. parallele Lage n' o''', so zeigt sich derselbe im G.Riß in seiner wahren Gestalt n'' b'' o a'' q. Man soll die Durchdringung der beiden Cylinder zeichnen (Fig. 128, Taf. VII).

Schneidet man die Cylinder durch Ebenen O P, V W... welche mit der A.T. parallel sind, so wird der eine (absteigende) Cylinder in der Mantellinie a'' a, b'' b... geschnitten, deren A.Riß a^{IV} a', b^{IV} b' ... ist, während der andere Cylinder in den Ellipsen (f g, a' k' g') und (e r, e' b')

geschnitten wird. Die Punkte (a, a'), (b, b')..., in welchen letztere von den Mantellinien (a'' a, a^{IV} a'), (b'' b, b^{IV} b') geschnitten werden, sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

§. 91.

10) Die Linie a b d m h k l (Fig. 129, Taf. VII) sei die Spur eines zur G.T. senkrechten Cylinders (gothisches Gewändeprofil), derselbe wird durch zwei schiefe Ebenen a n o und n t o, welche gegen die G.T den Neigungswinkel α machen, geschnitten; man soll die Schnittlinien bestimmen.

Schneidet man die Ebene a n o durch eine zur G.T. senkrechte Ebene O P und klappt sie in die G.T. um, so erhält man als Umklappung das Profil p a'' o'', und zwar ist $\measuredangle$ 3'' a'' o'' = dem gegebenen Neigungswinkel α und a'' o'' die Spur der Ebene a n o in der Umklappung der Ebene O P. Da die Mantellinien des Cylinders senkrecht auf der G.T., also senkrecht auf a'' 3'' stehen, so ziehe man die Mantellinien b b'', c c'', d d''... senkrecht zu a'' 3''; diese werden von der Ebene a'' o'' in den Punkten b'', c'', d''... geschnitten; macht man nun im Aufriß 1' b' = 1'' b'', 2' c' = 2'' c'', 3' d' = 3'' d'' u. s. f. und verbindet diese Punkte entsprechend mit einander, so erhält man die gewünschte Schnittcurve. Ebenso erhält man auch den Schnitt mit der Ebene n l o mit Hilfe der Ebene V W, deren Umklappung das Profil q a''' o''' u. s. w. liefert.

§. 92.

11) Die Axe x der Umdrehungsfläche A D E B (Fig. 130, Taf. VII) stehe senkrecht auf der A.T.; gibt man dem Normalschnitt A B die zur G.T. parallele Lage A C, so erhält man auf letztere die wahre Gestalt jenes Profils a s t b c v, diese Umdrehungsfläche wird von einem zur G.T. senkrechten Cylinder, dessen Normalprofil m n o p d e r ist, geschnitten. Man soll die Durchdringung beider Flächen zeichnen.

Man schneide beide Flächen durch Hilfsebenen parallel zur A.T. Die Hilfsebene O P z. B. schneidet die Umdrehungsfläche in den durch a, b, c gehenden Parallelkreisen a‴ e‴, b‴ e″, c‴ e′, während sie den Cylinder in den durch d und e gehenden Mantellinien d′ d‴, e′ e‴ schneidet; die Schnittpunkte d′, d″, d‴, e′, e″, e‴ derselben mit jenen Parallelkreisen sind offenbar Punkte der verlangten Durchdringungslinien beider Flächen.

§. 93.

Allgemeine Lösung der Aufgabe: den Schnitt zweier beliebigen Flächen zu bestimmen.

Schneidet man die gegebenen Flächen F und F′ (oder Körper) (Fig. 131, Taf. VII) durch eine beliebige Ebene E, so erhält man in dieser Ebene zwei Schnittfiguren C und C′; diejenigen Punkte P, P′, P″...., in welchen sich die Schnittfiguren C und C′ schneiden (also beiden Flächen gemeinschaftlich sind), sind Punkte der gegenseitigen Durchdringungsfigur beider Flächen (oder Körper). Durch wiederholte Anwendung solcher Ebenen (Hilfsebenen, wie E) kann man sich nun eine hinreichende Anzahl von Punkten der Durchdringungsfigur verschaffen, deren entsprechende Verbindung durch gerade oder krumme Linien (je nach der Art der sich schneidenden Flächen oder Körper) die Durchdringungsfigur ergibt.

Daß man jene Hilfsebene in jedem speciellen Fall so annehmen wird, daß sie die gegebenen Flächen in den einfachsten und am leichtesten construirbaren Linien (Gerade oder Kreise) schneiden, versteht sich von selbst, weil man auf diese Art am schnellsten und am sichersten ein genaues Resultat erzielt, wie die in den vorhergehenden Paragraphen angeführten Beispiele zeigen.

§. 94.

Allgemeine Lösung der Aufgabe: den Schnittpunkt einer Geraden mit einer beliebigen Fläche zu finden.

Man lege durch die gegebene Linie L (Fig. 132, Taf. VII) eine beliebige Ebene E, und zeichne die Schnittlinie C dieser Ebene

mit der gegebenen Fläche F; in denjenigen Punkten P, P', P'' ..., in welchen die Linie L die Schnittlinie C schneidet, schneidet sie auch die gegebene Fläche F.

In den meisten Fällen wird man als Hilfsebene (E) die eine oder andere der beiden Reißebenen der Geraden L anwenden.

§. 95.

Darstellung eines Körpers in verschiedenen Lagen gegen die Grundebenen durch Drehung.

Es sei (a b c d, a' b' s') (Fig. 133 a, Taf. VIII) G. und A.Riß einer Pyramide, die mit ihrer Grundfläche auf der G.T. steht. Neigt man die Pyramide nach rechts, indem man sie um die Kante (b c, b' c') eine Drehung machen läßt, so daß ihre Grundfläche mit der G.T. den Winkel α (Fig. 133 b, Taf. VII) einschließt, so ändert sich dadurch die Form des Aufrisses nicht; sämmtliche Eckpunkte der Pyramide beschreiben bei dieser Neigung Kreise, deren Ebene senkrecht zur Drehungskante b c, also parallel zur A.T. sind. Der G.Riß s von s' (Fig. 133 b) liegt daher auf der zum Grundschnitt parallelen Geraden s s, senkrecht unter s'. Auf gleiche Weise findet man die Grundrisse der übrigen Ecken. Dreht man den Grundriß (Fig. 133 b) um einen beliebigen Winkel, so daß er die Lage Fig. 133 c annimmt, so ändern sich bei dieser horizontalen Drehung die Höhen der Punkte nicht, die Aufrisse der Eckpunkte müssen daher in Fig. 133 c mit den von Fig. 133 b in gleicher Höhe liegen.

Gibt man nun wieder dem Aufriß eine Neigung, so etwa, daß die Kante b' c' Fig. 133 d mit dem Grundschnitt den Winkel b macht, so erfolgt die Bewegung der Punkte in Ebenen parallel zur A.T. (wie in 133 b); die G.Risse der Pyramidenecken in Fig. 133 d haben daher die gleiche Entfernung von der A.T. wie in Fig. 133 c.

In Fig. 133 e ist die Neigung fortgesetzt, bis die Kante c' s' (Fig. 133 d) mit der G.T. zusammenfällt.

In Fig. 133 f ist die Pyramide nochmals in horizontaler Richtung gedreht; der Grundriß ist derselbe wie in Fig. 133 e,

nur seine Lage ist eine andere, die Höhen der Eckpunkte sind dieselben wie in Fig. 111 e, ihre Aufrisse liegen also mit denen in Fig. 133 e in gleichen Höhen.

Anhang.

Anwendung der darstellenden Geometrie auf Perspektive.

Isometrische Projektion. Parallelperspektive.

§. 96.

Die isometrische Projektion eines Körpers ist eine Art perspektivischer Darstellung desselben, welche den Zweck hat, ein übersichtlicheres, verständlicheres Bild von demselben zu geben, als seine geometrischen Risse in manchen Fällen gewähren.

Projicirt man den in Fig. 134, Taf. VIII durch G. und A.Riß dargestellten Körper auf eine Ebene OP, welche mit der A.T. parallel ist, so ist diese Projektion dem Aufriß ganz gleich. Legt man die Ebene OP in die Zeichnungsebene um, so erhält man die dem Aufriß ganz gleiche Figur $A'''\ D'''\ D^{IV}\ A^{IV}$. Gibt man nun den auf OP senkrecht stehenden Reißloten $a\,a'''$, $b\,b'''$, $c\,c'''$ ... eine beliebige (z. B. zu m n parallele) Richtung, und dieselbe Länge, welche sie im G.Riß haben, d. h. macht man $A'''\,A' = a''\,a$, $B'''\,B' = b'''\,b$, $E'''\,E' = e'''\,e$, $C'''\,C' = c'''\,c$ u. s. f., und verbindet die so gefundenen Punkte entsprechend mit einander, so erhält man die isometrische Projektion des Körpers.

Von der Richtung der Linie m n hängt es ab, welche von den verschiedenen Seiten eines Körpers man zur Anschauung bringen will, wie die Darstellung des Würfels (Fig. 135, Taf. VIII) zeigt. Man sieht außer der vorderen Fläche desselben in a die obere und

rechte, in b die untere und rechte, in c die obere und linke, in d die untere und linke Seite.

Perspektive.

§. 97.

Obgleich die in §. 96 erwähnte Art der Darstellung eines Körpers in vielen Fällen genügt (so z. B. beim Heraustragen der Steine im Steinschnitt u. s. w.), so läßt sich nicht läugnen, daß derartige Zeichnungen für unser an das perspektivische Sehen gewöhnte Auge nicht gerade anziehende, oft sehr verschobene Formen haben, wie z. B. die isometrische Darstellung des Würfels (siehe Fig. 135) zeigt, er erscheint z. B. viel zu tief, die Rückfläche scheint größer zu sein als die Vorderfläche u. s. f.

Diesem Uebelstand wird man dadurch abhelfen, daß man 1) die Tiefen (d. h. die Richtung der Reißlote) nicht parallel macht, sondern nach einem beliebig zu wählenden Punkte convergiren läßt und 2) die Tiefenmaße (d. h. die Längen der Reißlote) nicht gleich macht, sondern nach einem perspektivischen Maaßstab aufträgt. Es stimmt dies mit den Grundgesetzen der Perspektive überein: 1) parallele Linien im Raum convergieren im perspektivischen Bilde nach einem Punkt, dem Fluchtpunkt; 2) eine Linie von gegebener Länge erscheint um so kleiner, je weiter sie vom Auge entfernt ist.

§. 98.

Es sei TT' (Fig. 136, Taf. VIII) eine durchsichtig gedachte auf der Ebene des Papieres senkrecht stehende Ebene, die Tafel- oder Bildfläche; der Punkt O bezeichne die Stelle, in der sich das Auge desjenigen befindet, der einen hinter der Bildfläche befindlichen Gegenstand betrachtet. Eine durchs Auge O gelegte horizontale Ebene heißt Horizontebene, diese schneidet die Bildfläche in einer horizontalen Geraden, dem Horizont. Jede von O ausgehende Gerade heißt ein Sehstrahl. Ist ein Sehstrahl nach irgend einem Punkt d gerichtet, so ist sein Durchschnitt d' mit der Bildfläche TT' das perspektivische Bild des Punktes d.

Es sei a b (Fig. 136, Taf. VIII) eine horizontale, die Bildfläche im Punkt a schneidende Gerade. Zieht man vom Auge aus nach beliebigem Punkte c, d, e . . . derselben Sehstrahlen, so liegen dieselben in einer Ebene, welche durch a b und O geht und welche zugleich die durch O gehende mit a b parallele Gerade O f enthalten muß. Die Schnittlinie a f dieser Ebene mit der Bildfläche geht durch die Schnittpunkte a, c', d', e' . . . . f und ist das perspektivische Bild der Geraden a b.

Ist m n eine zweite mit a b parallele Gerade, so liegen auch hier die Sehstrahlen O p, O q, O r . . . in einer Ebene, welche durch m n und O geht und ebenfalls die Gerade O f enthält; ihre Schnittlinie mit der Bildfläche geht durch die Punkte m p' q' r' . . . f und ist das perspektivische Bild der Geraden m n. Dasselbe findet statt für alle mit a b parallele Gerade, d. h. die Bilder aller mit a b parallelen Geraden gehen durch ihren Schnittpunkt a, m . . . mit der Tafel und demjenigen Punkt f, in welchem eine durch's Auge O mit a b parallele Gerade, der Parallelstrahl, die Tafel schneidet. Der Punkt f heißt der Fluchtpunkt.

§. 99.

Zieht man vom Auge O aus (Fig. 137, Taf. VIII) zwei horizontale, also in der Horizontalebene liegende Gerade, und zwar O o' senkrecht zur Tafel T T' und O D so, daß sie mit der Tafel einen Winkel von 45° einschließt, so schneiden dieselben die Tafel im Horizont in den Punkten o' und D. Der Punkt o' ist demnach der Fluchtpunkt aller Geraden, welche senkrecht zur Tafel stehen, und D der Fluchtpunkt aller horizontalen Geraden, welche mit der Tafel einen Winkel von 45° einschließen. Der Punkt o' heißt der Augpunkt, D der Distanzpunkt, weil seine Entfernung von o' der Entfernung (Distanz) des Auges von der Tafel T T' gleich ist.

Sollen nun die perspektivischen Bilder der Linien a p und c p gezeichnet werden, von denen die erste senkrecht zur Tafel ist, die zweite mit der Tafel einen Winkel von 45° macht, so müssen wir die Bildfläche T T' zunächst in die Ebene des Papieres (die Zeich-

nungsebene) umlegen. Es sei nun HH' (Fig. 138, Taf. VIII) der Horizont, o' der Augpunkt und D der Distanzpunkt; ferner seien a und c die den beiden Punkten a und c (Fig. 137) entsprechenden Punkte (d. h. die Spuren der beiden Linien in der Tafel). Da nun o' der Fluchtpunkt für p und D der Fluchtpunkt für cp ist, so muß nach dem Vorhergehenden ao' (Fig. 138) das Bild der Geraden ap (Fig. 137) und cD (Fig. 138), das Bild der Geraden cp (Fig. 137), △ caP (Fig. 138) das Bild des △ cap (Fig. 137) oder endlich P (Fig. 138) das Bild des Punktes p (Fig 137) sein. Das Dreieck caP aber ist in Wirklichkeit ein gleichschenkliges rechtwinkliges, folglich Pa in Wirklichkeit gleich ca.

Ist demnach die senkrechte Entfernung ap (Fig. 137) eines Punktes p von der Tafel gegeben, so kann man diese leicht perspektivisch zeichnen, wenn man durch den Fußpunkt a (Fig. 138) dieser Senkrechten eine Gerade ac parallel zum Horizont HH' zieht, ac gleich dieser Entfernung macht, den Punkt a mit o' und c mit D verbindet; das von ao' abgeschnittene Stück aP ist dann das perspektivische Bild einer in a auf der Tafel senkrechten Geraden, deren Länge gleich ac ist; oder P das perspektivische Bild eines Punktes, dessen senkrechte Entfernung vom Punkt a der Tafel gleich ac ist.

Betrachten wir nunmehr die Ebene OP (Fig. 134) als die Bildfläche, so ist nach Obigem klar, daß man die auf diese Ebene gefällten Senkrechten a a‴, b b‴, c c‴ ...., resp. die Geraden A‴ A', B‴ B', C‴ C',... A^{IV} A'', B^{IV} B'', C^{IV} C'' ... nicht parallel machen darf, sondern nach dem Augpunkte o' ziehen muß, und daß man alsdann vom Distanzpunkt D aus, wie oben angegeben ist, die perspektivischen Längen abzuschneiden hat.

Ist nun A‴ D‴ D^{IV} A^{IV} (Fig. 139, Taf. VIII) die der in Fig. 134 mit denselben Buchstaben bezeichneten analogen mit dem dortigen Aufriß ganz gleiche Figur, so ziehe man den Horizont HH', bezeichne darauf einen beliebigen Punkt o' als Augpunkt und einen zweiten Punkt D als Distanzpunkt; zeichnet man von dem Punkte A‴, B‴, C‴ ... A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} .... gerade Linien nach o', so sind dieß die Perspektiven der auf OP (Fig. 134) senkrechten

Geraden a a‴, b b‴, c c‴ ....; macht man ferner A‴ k (Fig. 139) = a‴ a (Fig. 134) und zieht D k, so ist A das Bild des Punktes (a, a′) (Fig. 134); ebenso ist B das Bild des Punktes (b, b′) (Fig. 134), wenn man B‴ i Fig. 139 = b b‴ Fig. 134 macht und i D zieht u. s. f.

§. 100.

Wir haben oben erwähnt, daß die Entfernung des Punktes D von o′ gleich der Entfernung des Auges von der Tafel sei. Es ist nun nicht ganz gleichgültig, wie groß man diese Distanz annimmt, sie muß vielmehr mindestens gleich der deutlichen Sehweite gemacht werden, welche für ein gesundes Auge circa 2,5 Decimetres beträgt. Da bei dieser Größe von o′D der Distanzpunkt häufig über den Bereich des Zeichnungsblattes hinausfällt, so kann man dem Punkt D auch $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ... dieser Distanz geben, nur müssen dann die Längen der von den Eckpunkten des Körpers auf die Tafel gefällten Senkrechten ebenfalls auf dieses Maß, d. h. auf $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ... beschränkt werden.

Soll z. B. das Bild des in Fig. 140, Taf. VIII dargestellten Körpers gezeichnet werden, so nehme man wieder die Tafel oder Bildfläche T T′ parallel zur A.T. an und fälle von den Ecken der Grundrißfigur Lote auf T T′, ziehe eine beliebige horizontale Linie H H′, den Horizont, bestimme auf demselben die Lage des Augpunktes o′, mache die Figur a″ b″ g″ h″ gleich dem Aufriß und ziehe von den Eckpunkten derselben gerade Linien nach o′. Macht man o′ $\frac{D}{4}$ = dem vierten Theil der Augdistanz (also circa 6 Centimeter), so hat man, um z. B. das Bild des Punktes (g, g′) zu finden, g″ k = $^1/_4$ g y zu machen und k mit $\frac{D}{4}$ zu verbinden; der Schnittpunkt von k $\frac{D}{4}$ mit g″ o′ ist dann das Bild des Punktes (g, g′). Um bei diesem Verfahren die sich oft wiederholende Viertheilung von Linien zu vereinfachen, mache man sich einen sogenannten Proportionalmaßstab, d. h. man ziehe auf einer Geraden m n eine Senkrechte p n, mache p n = $^1/_4$ m n und ziehe

m p; alsdann ist jede innerhalb des Winkels n m p mit p n parallele Gerade gleich dem vierten Theil ihrer Entfernung vom Punkt m; d. h. wenn man z. B. r s || p n zieht, so ist r s = ¼ r m; ist nun r m = x c, so ist auch r s = ¼ x c u. s. f.

Bemerkung 1. Man kann den Distanzpunkt links oder rechts vom Augpunkt o' annehmen, nur muß man dann im ersten Fall die Distanzen der Punkte, z. B. y g, oder im vorliegenden Fall ¼ y g = g'' k nach links, im zweiten Fall nach rechts (wie g'' k') auftragen.

Bemerkung 2. Ein Blick auf Fig. 140, Taf. VIII genügt, um zu zeigen, welche Lage man dem Punkt o' (also auch dem Horizont) geben muß, um die linke, rechte, obere oder untere Seite eines Körpers zur Ansicht zu bringen. Hätte man den Körper von oben und rechts sehen wollen, so hätte man den Horizont höher und zwar über h'' g'' ziehen müssen. Hätte man den Körper ganz von unten und zugleich dessen linke Seite zeigen wollen, so hätte man den Horizont H H' unter a'' b'' und den Augpunkt o' links von der Fig. a'' b'' g'' h'' annehmen müssen.

§. 101.

Obgleich die beschriebene Art der Construktion perspektivischer Bilder in vielen Fällen genügt und es möglich ist mit Hilfe derselben jeden beliebigen Gegenstand, der durch G. und A. Riß gegeben ist, in Perspektive zu setzen, so ist sie doch immerhin für die Darstellung größerer Bilder zu umständlich und man wendet in diesen Fällen stets mit Vortheil die Methode der Fluchtpunkte an, die wir in den nachfolgenden Paragraphen ausführlicher beschreiben wollen.

§. 102.

Wir haben bereits oben §. 98 gesagt, daß wir uns die Bildfläche als eine vor dem Auge O lotrecht stehende durchsichtige Ebene A B C D (Fig. 141, Taf. IX) zu denken haben, daß die durchs Aug gelegte horizontale Ebene E F G die Horizontebene, und ihr Durchschnitt H H' mit der Bildfläche die Horizontlinie

oder kurz Horizont heißt, und haben diesen Erklärungen noch Folgendes beizufügen:

Diejenige lotrechte Ebene JKLM, welche durch das Auge senkrecht zur Bildfläche gelegt werden kann, heißt Hauptebene; sie schneidet die Horizontebene in einer zur Bildfläche senkrechten Geraden Oo, dem Hauptstrahl, und die Bildfläche in einer lotrechten Geraden PQ, der Hauptlinie. Der Schnittpunkt o' der Hauptlinie mit der Tafel heißt Augpunkt.

Es wurde in §. 98 ferner erwähnt, daß, wenn man aus einer gegebenen Geraden L durch's Auge O eine Parallele zieht, letztere der Parallelstrahl heißt, und daß dessen Schnittpunkt mit der Bildfläche der Fluchtpunkt für die Gerade L, so wie für jede mit ihr parallele Gerade sei.

Da die Spur einer Geraden L, d. h. derjenige Punkt, in welchem L die Bildfläche schneidet, mit seinem Bilde zusammenfällt, also ebenfalls ein Punkt des Bildes der Geraden ist, so ist das Bild einer Geraden L die geradlinige Verbindung ihrer Spur mit dem Fluchtpunkt.

Bemerkung. Da der zu einer Geraden L gehörige Parallelstrahl nach dem unendlich entfernten Punkt von L gerichtet ist, so kann man auch sagen, der Fluchtpunkt sei das perspektivische Bild des unendlich entfernten Punktes von L.

§. 103.

Aus diesen Erklärungen ergeben sich unmittelbar folgende specielle Lagen von Fluchtpunkten für gewisse Linienrichtungen.

1) Für Linien senkrecht zur Bildfläche ist der Augpunkt der Fluchtpunkt; denn der zugehörige Parallelstrahl fällt mit dem Hauptstrahl zusammmen.

2) Alle horizontale Linien haben ihren Fluchtpunkt im Horizont; denn die Parallelstrahlen solcher Linien liegen durchweg in der Horizontebene, müssen demnach die Bildfläche nothwendig in einem Punkt des Horizonts schneiden.

Zusatz: Horizontale Linien, welche mit der Bildfläche

Winkel von 45° einschließen, haben ihren Fluchtpunkt in einem der Distanzpunkte.

3) Linien, welche mit der Bildfläche parallel sind, haben keinen Fluchtpunkt; ihre perspektivischen Bilder sind unter sich und mit den Linien im Raum parallel; daher sind auch z. B. die Bilder lotrechter Linien wieder lotrecht 2c.

4) Die Fluchtpunkte aller Linien, welche mit der Bildfläche denselben Winkel machen, liegen auf dem Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Augpunkt ist; beschreibt man z. B. mit einem Radius gleich der Entfernung des Distanzpunktes vom Augpunkt (d. h. gleich der Augdistanz) um den Augpunkt einen Kreis, so liegen auf ihm die Fluchtpunkte aller Linien, welche mit der Tafel Winkel von 45° einschließen.

5) Sind Linien L, L', L'', L''' . . . parallel zu einer Ebene E, so liegen ihre Fluchtpunkte in derjenigen Geraden, in welcher eine durch's Auge gehende mit E parallele Ebene E_0 die Bildfläche schneidet, denn die Parallelstrahlen zu den Geraden L, L', L'', L''' . . . . liegen alle in der Ebene E°.

Bemerkung. Aus diesem Grunde liegen auch die Fluchtpunkte aller horizontalen Linien im Horizont (s. Nr. 2), aus demselben Grund müssen auch die Fluchtpunkte aller Linien, welche mit der Hauptebene parallel sind, in der Hauptlinie liegen.

§. 104.

Es sei a' m'' p'' d' (Fig. 142, Taf. IX) der Aufriß, d. h. die gerade geometrische Ansicht einer Seite, und a b c d der Grundriß eines Postamentes; man soll das perspektivische Bild desselben zeichnen.

Angenommen T T' sei die Bildfläche und o der Standpunkt des Beschauers, so ist offenbar die zu T T' senkrechte Gerade O o'' der Hauptstrahl. Die Höhe des Auges ist bestimmt durch die Lage des Horizontes H H'' im Aufriß, woraus wir ersehen, daß ein Theil des Postamentes über, ein Theil desselben unter dem Horizont liegt. Die Kanten a b, c d, m n, o p... sind parallel

und horizontal, ihr Fluchtpunkt liegt daher im Horizont. Um seine Lage zu erhalten ziehen wir den zu jenen Linien gehörigen Parallelstrahl O F. Dieser schneidet den Horizont in F, d. h. in einem Punkte, der in der Entfernung = o'' F rechts vom Augpunkt liegt. Es sei nun H H' der Horizont des zu zeichnenden Bildes, x y die Hauptlinie, o' der Augpunkt, und daher, wenn man o' f' = o'' F macht, f' der Fluchtpunkt obengenannter Kanten des Postamentes.

Verlängert man die Kante c d bis sie die Bildfläche T T' im Punkt 1 schneidet, so liegt dieser Schnittpunkt offenbar unter dem Horizont H H' ebenso tief, als die Kante c d unter demselben liegt, d. h. ebenso tief wie der Punkt d' des Aufrisses. Zieht man daher d' R || H H' und 11' senkrecht H H', so ist der Schnittpunkt 1' die Spur der Linie c 1 in der Bildfläche; da nun aber f ihr Fluchtpunkt ist, so ist nach §. 102 die Gerade f 1' ihr perspektivisches Bild.

Zieht man jetzt von O nach d den Sehstrahl O d, und denkt sich durch denselben eine lotrechte Ebene gelegt, so schneidet diese die Bildfläche T T' in einer lotrechten Linie, also in einer Linie, welche in der Entfernung 20'' parallel der Hauptlinie x y ist, also in 2' 2''. Da nun das Bild des Punktes (d, d') ebensowohl auf 2' 2'' als auf f 1' liegen muß, so kann es nur der Schnittpunkt beider, d. h. der Punkt D' sein.

Der nach c gerichtete Sehstrahl O c schneidet die Bildfläche im Punkt 5, wenn wir demnach von 5 eine Linie herabloten bis zum Schnitt mit f 1' so ist der Schnittpunkt C' das Bild des Punktes c und C' D' das Bild der Kante c d. Auf gleiche Weise erhält man auch die Bilder aller übrigen Kanten und Ecken des Postaments.

Bemerkung. Läßt sich die Construktion des Bildes nicht unmittelbar in der ebengezeigten, allerdings sehr bequemen Art und Weise, unmittelbar unter dem Grundriß ausführen, wobei man nur die Punkte 1, 2, 3 . . ., in welchen die verlängerten Kanten und die Sehstrahlen die Tafel schneiden, herabzuloten braucht, so darf man ja nur die Entfernungen jener Punkte mit dem Zirkel von der Hauptlinie x y aus nach links oder rechts abtragen und alsdann

die Lotlinien ziehen; im Uebrigen bleibt die Construktion dieselbe, wie vorher.

§. 105.

Denken wir uns irgend eine ebene Figur, z. B. ein Quadrat parallel zur Bildfläche, und nach den Eckpunkten desselben Sehstrahlen gezogen, so bilden diese offenbar die Kanten einer Pyramide, deren Grundfläche eben das gegebene Quadrat ist; da aber die Bildfläche parallel zu dieser Grundfläche ist, so schneidet sie die Pyramide in einer zur Grundfläche ähnlichen Figur, d. h. wieder in einem Quadrat. Daraus folgt, daß wenn eine ebene Figur parallel zur Bildfläche ist, ihr Bild der gegebenen Figur ähnlich sein muß; ist dieses erstere ein Quadrat, Dreieck, Kreis u. s. f., so ist ihr Bild wieder ein Quadrat, ähnliches Dreieck, Kreis u. s. f.

Beispiel. Es sei (a c, a' c') (Fig. 143, Taf. IX) ein Kreis parallel zur Bildfläche T T', O das Auge, H'' H''' die Horizontebene, man soll die Perspektive des Kreises zeichnen.

Nach obiger Erklärung ist das Bild wieder ein Kreis, man hat daher nur die Lage seines Mittelpunktes und die Größe des Radius zu bestimmen.

Die horizontale Linie H H' sei der Horizont, o' der Augpunkt, x y die Hauptlinie. Fällt man vom Mittelpunkt b auf T T' eine Senkrechte b b''', so liegt die Spur dieser Senkrechten in der Tafel rechts von der Hauptlinie in der Entfernung = o'' b''' und unter dem Horizont in der Entfernung = b d'. Macht man daher o' g = b d', zieht g h || H H' und macht g h = o'' b''', so ist h die Spur der Senkrechten, also h o' ihr perspektivisches Bild. Der nach dem Mittelpunkt b gerichtete Sehstrahl O b schneidet die Tafel in b''; macht man daher g i = o'' b'' und zieht m n durch den Punkt i parallel zu x y, so ist B das Bild des Mittelpunktes. Zieht man endlich nach dem Endpunkt a des horizontalen Kreishalbmessers (a b, a' b') den Sehstrahl O a, so ist offenbar a'' b'' die perspektivische Größe des Kreishalbmessers, mit dem man nunmehr um B als Mittelpunkt den Kreis A C zu beschreiben hat.

§. 106.

Perspektive krummer Linien.

Um das Bild einer ebenen Curve zu erhalten, zeichne man in dieselbe ein geradliniges Polygon hinein, construire das Bild des Letzteren und verbinde die Ecken durch eine entsprechende stetige Curve; oder man zeichne über die Curve ein Netz von geraden Linien, womöglich in einer solchen Lage, daß sich dieselben möglichst leicht in Perspektive setzen lassen, und zeichne sodann in das perspektivische Netz eine Curve entsprechend hinein.

Das Bild einer gewundenen Curve erhält man dadurch, daß man die Bilder einer hinreichenden Anzahl von Punkten der gegebenen Curve bestimmt und diese stetig mit einander verbindet.

Bemerkung. Berührt eine Gerade MN eine Curve im Punkt A, so ist auch das Bild der Geraden MN Tangente am Bild der Curve im Bilde des Punktes A.

§. 107.

Perspektiven krummer Flächen.

1) Cylinderflächen. Man construire die perspektivischen Bilder der Grund- und Deckfläche und verbinde beide entsprechend durch Tangenten.
2) Kegelflächen. Man zeichne das Bild der Grundfläche und der Spitze und ziehe von letzterer Tangenten an das Bild der Grundfläche.
3) Umdrehungsflächen. Man construire die Bilder einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen derselben, und umhülle diese durch eine entsprechende Curve.

§. 108.

Wahl des Standpunktes, Stellung der Bildfläche.

Ist a b (Fig. 144, Taf. IX) der Grundriß irgend eines perspektivisch darzustellenden Gegenstandes, z. B. eines Gebäudes, so hat man sich zunächst darüber Rechenschaft zu geben, von welcher

Seite man dasselbe sehen will. Daß sich in dieser Beziehung keine bestimmten Regeln geben lassen, ist selbstverständlich; man wird eben den Standpunkt in jedem speciellen Fall so zu wählen haben, daß die interessanteste Seite des Gegenstandes im Bilde hauptsächlich zur Ansicht kommt, und wird darnach den Hauptstrahl O x durch den Schwerpunkt des Grundrisses ziehen.

Alle Gegenstände, welche wir mit einem Blick übersehen können, liegen innerhalb einer Kegelfläche, dessen Spitze sich im Auge befindet, und dessen Winkel an der Spitze nahezu 180° beträgt, wenn wir mit beiden Augen sehen, und circa 90°, wenn wir ein Auge schließen; dieser Winkel heißt der Sehwinkel. Allein wir sehen bei weitem nicht alle Gegenstände innerhalb dieses Kegelraumes mit gleicher Schärfe und Deutlichkeit, vollkommen klar und deutlich sehen wir vielmehr nur diejenigen Punkte, welche in der Axe dieses Kegels (Augenaxe) liegen; sie kommen um so unbestimmter zu unserem Bewußtsein, je entfernter sie der Axe liegen. Gewöhnlich nimmt man in der Perspektive den Winkel, innerhalb dessen das deutlich Sichtbare des Sehfeldes liegt, zu 20° bis 40° an, oder: wir müssen uns von einem Gegenstand, den wir mit einem Blick deutlich übersehen wollen, so weit entfernen, als seine $1^1/_2$ bis 3fache größte Dimension beträgt.

Im vorliegenden Fall (Fig. 144, Taf. IX) müßte demnach die Entfernung O p das $1^1/_2$ bis 3fache von a b sein, wenn nicht etwa die Höhe des Gegenstandes beträchtlich größer als diese Breite ist, in welchem Fall die Entfernung o p das $1^1/_2$ bis 3fache der Höhe betragen müßte.

Die Tafel oder Bildfläche T T' ist stets senkrecht zum Hauptstrahl O x. Daß ihre Entfernung O e vom Auge O mindestens 2,5 Centimeter betragen soll, haben wir schon oben erwähnt; doch kann dieselbe auch beliebig größer angenommen werden; überhaupt hängt von dieser Entfernung die Größe des Bildes ab, wie man leicht sieht, wenn man nach den äußersten Punkten des Gegenstandes die Sehstrahlen O a und O b zieht, denn innerhalb derselben liegt stets das Bild des Gegenstandes. Es wird demnach auch nicht schwierig sein, der Bildfläche T T' eine solche Lage zu geben, daß die Breite des Bildes eine zum voraus bestimmte Größe erhält.

§. 109.

Es kommt beim Zeichnen perspektivischer Bilder häufig vor, daß Fluchtpunkte von Linien über den Bereich des disponiblen Zeichnungsraumes hinausfallen. Solche Fluchtpunkte lassen sich auf folgende Weise sehr einfach ersetzen.

Es seien a b und c d (Fig. 145, Taf. IX) die Bilder zweier paralleler Linien, es soll durch den Punkt p eine Linie nach dem Fluchtpunkt der Geraden a b und c d gezogen werden. Man ziehe (etwa am Rande des Zeichnungsblattes) zwei parallele Linien a c und b d, theile jede derselben in eine gleiche Anzahl gleicher Theile (je mehr, desto vortheilhafter); legt man nun an den Punkt p ein Lineal so, daß es zugleich auf den beiden Skalen a c und b d je gleich viele Theile abschneidet, so muß die so gezogene Linie nach demselben Punkt gehen, in welchem a b und c d sich schneiden, d. h. nach demselben Fluchtpunkt gerichtet sein.

Anwendung der darstellenden Geometrie auf die Construction der Schlagschatten.

§. 110.

Ist a (Fig. 146, Taf. IV) ein leuchtender Punkt, so gehen von demselben nach allen Richtungen hin Lichtstrahlen aus; diese sind, so lange sie sich in einem Medium gleicher Dichtigkeit bewegen, gerade Linien. Trifft ein solcher Lichtstrahl einen materiellen Punkt b, so hebt dieser in der Verlängerung b d die Wirkung des Lichtstrahls auf. Der Mangel des Lichts in der Linie b d macht sich auch alsbald bemerklich, wenn in den Bereich desselben irgend eine Fläche E gebracht wird, indem an der Stelle, in welcher die Gerade a d die Fläche E trifft, ein dunkler Punkt c entsteht. Dieser Punkt c heißt der Schlagschatten des Punktes b, während die lichtlose Linie b d der Schatten des Punktes b ist. Daraus folgt:

Der Schlagschatten eines Punktes b auf eine Fläche E ist derjenige Punkt, in welchem der durch b gehende Lichtstrahl (d. h. die durch b vom leuchtenden Punkt ausgehende Gerade) die Fläche E schneidet.

Ist man demnach im Stande, jene Aufgaben der darstellenden Geometrie zu lösen: den Schnittpunkt einer Geraden mit irgend einer beliebigen Fläche zu bestimmen, so wird man auch jede hierher gehörige Aufgabe, sofern es sich um die Construction des Schlagschattens eines Punktes auf irgend eine beliebige Fläche handelt, lösen können (s. §. 94).

Bemerkung. Diejenigen Aufgaben der darstellenden Geometrie, welche sich unmittelbar auf die Construction des Schlagschattens eines Punktes anwenden lassen, finden sich in folgenden Paragraphen.

1) Der Schlagschatten eines Punktes auf die eine oder andere der beiden Grundebenen ist die betreffende Spur des durch den Punkt gehenden Lichtstrahls (s. §. 12).

2) Schlagschatten eines Punktes auf eine durch ihre Spuren gegebene Ebene (s. §. 19, Nro. 11).

3) Desgleichen wenn die Ebene durch zwei sich schneidende Gerade gegeben ist (§. 21, Nro. 2).

4) Desgleichen auf einen von ebenen Flächen begrenzten Körper (§. 35, Nr. 4).

5) Desgleichen auf einer Umdrehungsfläche (s. §. 68 Nr. 2 und Bemerkung).

6) Desgleichen auf einem Kegel (§. 68, Nr. 3).

7) Desgleichen auf eine Kugel (§. 68, Nr. 4).

8) Schlagschatten eines Polygons auf die Grundebenen (§. 21, Nr. 8, a u. b).

9) Desgleichen auf eine durch ihre Spuren gegebenen Ebene (§. 21, Nr. 8, c).

§. 111.

Ist die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, so ist der Schlagschatten eines Körpers auf eine Ebene E offenbar die Central-

projection desselben, wobei der leuchtende Punkt das Projectionscentrum, die Lichtstrahlen die Projectionsstrahlen, und E die Projektionsebene ist. (Vergl. §. 21, Nro. 7.)

Denkt man sich den leuchtenden Punkt in sehr großer Entfernung von den beleuchteten Gegenständen, so werden die Unterschiede in den Richtungen der Lichtstrahlen, die nach verschiedenen Punkten eines Körpers gehen, um so kleiner sein, je größer die Entfernung des leuchtenden Punktes ist. Nehmen wir z. B. die Sonne als Lichtquelle an, so wird dieser Unterschied der Lichtstrahlenrichtung verschwindend klein, da selbst derjenige Winkel, den zwei vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe nach den beiden Erdpolen gehende Strahlen mit einander machen, kaum 17 Sekunden beträgt, ein Winkel der sich graphisch gar nicht mehr darstellen läßt. Wir können daher die Sonnenstrahlen füglich als unter sich parallel annehmen, und werden im Folgenden stets von dieser Voraussetzung ausgehen.

Die Richtung der Lichtstrahlen, resp. ihre Lage gegen die Grundebenen, hat auf die größere oder geringere Schwierigkeit der Construction kaum einen Einfluß; es ist im Allgemeinen gleichgiltig, welche Lage man den Lichtstrahlen gegen die Grundebenen geben will.

Man nimmt jedoch fast immer beim technischen Zeichnen die Richtung der Lichtstrahlen so an, daß ihre Risse mit dem Grundschnitt Winkel von 45° einschließen (Fig. 147, Taf. IX), weil man dadurch erfahrungsgemäß die zweckmäßigste und günstigste Beleuchtung der Gegenstände erhält, und die Constructionen sich auf die bequemste Weise ausführen lassen.

§. 112.

Alle Lichtstrahlen, welche den sphärischen Körper A (Fig. 148, Taf. IX) treffen können, liegen innerhalb einer Cylinderfläche, deren Mantellinien die den Körper A berührenden Lichtstrahlen sind; denken wir uns die Berührungspunkte a, b, c, d . . . stetig mit einander verbunden, so bildet die so entstandene Curve offenbar die Grenze zwischen der beleuchteten und der dunkeln Seite des

Körpers; diese Linie heißt die Schattengrenze. Von dem dunkeln nicht beleuchteten Theil eines Körpers sagt man auch, er befinde sich im Selbstschatten oder Körperschatten. Der cylindrische Raum a a' d' d enthält keine direkten Lichtstrahlen und heißt der Schatten des Körpers A; tritt in den Bereich desselben irgend eine Fläche E, so entsteht auf ihr ein dunkler Fleck a' d', welcher der Schlagschatten des Körpers A heißt; der Umriß a' b' c' d' des Schlagschattens aber ist offenbar der Schnitt des Cylindermantels, d. h. der den Körper berührenden Lichtstrahlen mit der Fläche E, oder der Schlagschattenumriß eines Körpers ist der Schlagschatten seiner Schattengrenze.

§. 113.

Schneidet man eine krumme Fläche durch eine beliebige Ebene, und zieht in derselben an die Schnittcurve eine Tangente, so ist diese bekanntlich auch Tangente an der Fläche selbst; ist nun diese Tangente zugleich parallel zur Richtung der Lichtstrahlen, so können wir sie als einen den Körper berührenden Lichtstrahl betrachten und der Berührungspunkt muß nothwendig ein Punkt der Schattengrenze sein. Darin liegt die allgemeine Lösung des Problems: die Schattengrenze einer beliebigen krummen Fläche zu bestimmen.

Man schneidet nämlich die Flächen durch Ebenen parallel zur Richtung des Lichtstrahls (am besten wählt man hiezu eine der Reißebenen des Lichtstrahls, weil deren Schnitte mit den betreffenden Flächen in den meisten Fällen ohne Schwierigkeit sich construiren lassen) und zieht an die so erhaltenen Schnittcurven so viele Tangenten parallel zur Richtung des Lichtstrahls, als möglich sind; jeder Berührungspunkt ist sodann ein Punkt der Schattengrenze, die sich durch stetige Verbindung jener Punkte ergibt.

Sind jene Schnittcurven der Art, daß sie von den betreffenden Tangenten zugleich in einem Punkte geschnitten werden, so sind diese Schnittpunkte offenbar die Schlagschatten der Berührungspunkte; die entsprechende Verbindung einer Reihe solcher Schattenpunkte liefert den Schlagschatten der Schattengrenze.

Beispiel. a' b' c' d' (Fig. 149, Taf. IX) sei der Meridian,

(s, s' s'') die Axe einer Umdrehungsfläche, man soll deren Schlagschatten und Schattengrenze zeichnen.

Die horizontal projicirende Reißebene m n des Lichtstrahls schneidet die Umdrehungsfläche in der Curve m' f' g' e' n', welche man sehr einfach mit Hilfe der Parallelkreise erhält (s. ob. §. 68). An diese Curve lassen sich zwei Tangenten parallel zur Richtung l' des Lichtstrahls ziehen; die erste berührt die Schnittcurve in e', die zweite in g'; die Punkte e' und g' sind demnach Punkte von je einer Schattengrenze. Die an e' berührende Tangente schneidet in ihrer Verlängerung die Curve im Punkt f', folglich ist f' der Schlagschatten des Punktes e', d. h. ein Punkt des Schlagschattenumrisses.

Ebenso ergibt die Ebene o p im Aufriß die Schnittcurve o' i' h' k' p', welche in h' und k' je eine zum Lichtstrahl parallele Tangente zuläßt; h' und k' sind demnach wieder Punkte der Schattengrenze; die an h' berührende Tangente schneidet in ihrer Verlängerung die Curve im Punkt i', folglich ist i' ein Punkt des Schlagschattenumrisses. Hat man sich auf diese Weise eine genügende Anzahl von Punkten verschafft, so sind dieselben durch Curven stetig mit einander zu verbinden.

§. 114.

Hat man den Schlagschatten zu construiren, den zwei Flächen oder Körper gegenseitig auf einander werfen, so verfährt man genau ebenso, wie im vorigen Paragraphen, d. h. man schneidet beide Flächen oder Körper durch Ebenen parallel zur Richtung des Lichtstrahls; dadurch erhält man auf jeder Fläche eine Schnittcurve. Zieht man nun an diese Schnittcurven so viele Tangenten parallel zur Strahlenrichtung, als möglich sind, so sind alle Berührungspunkte Punkte der Schattengrenzen; verlängert man die den ersten Körper berührenden Tangenten, bis sie die durch dieselbe Ebene erzeugte Schnittcurve des zweiten Körpers treffen, so ist der Schnittpunkt allemal ein Punkt vom Schlagschattenumriß des ersten Körpers.

Beispiel. Man soll den Schlagschatten finden, welchen

die Kugel (P, P') (Fig. 150, Taf. IX) auf die Kugel (Q Q') wirft.

Die Reißebene m n des Lichtstrahls schneidet die Kugeln in den Kreisen (g h, g' h') und (i k, i' k'), zieht man im Aufriß die berührenden Lichtstrahlen l', l'', l''', l^{IV}, so erhält man in den Berührungspunkten Punkte der Schattengrenzen.

Die Lichtstrahlen l', l'', l''', l^{IV} liegen in der Ebene der Schnittcurve g' h' und i' k', d. h. in der Ebene m n; l' und l'' schneiden daher die Curve i' k' und zwar in den Punkten e' und f', die demzufolge die Schlagschatten der Punkte a' und b', also Punkte vom Schlagschattenumriß sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man sich eine hinreichende Anzahl von Punkten verschaffen, um mit Sicherheit sowohl den Schlagschattenumriß als auch die Schattengrenze zeichnen zu können.

Bemerkung. Ein kürzeres Verfahren, die Schattengrenze der Kugel zu bestimmen, siehe unten §. 116.

§. 115.

Obgleich das ebenbeschriebene ganz allgemeine Verfahren unter allen Umständen das gewünschte Resultat liefert, so nimmt man doch in manchen Fällen Umgang davon, da man unter Zugrundelegung nachfolgender Sätze häufig kürzere und einfachere Lösungen erzielt.

1) Ist eine Linie parallel mit einer Ebene, so wirft sie auf letztere einen Schatten, der mit ihr parallel und gleich lang ist.

2) Fällt der Schatten einer Linie auf mehrere parallele Ebenen, so sind die einzelnen Schattenstücke auf den Ebenen parallel.

3) Die Schatten paralleler Geraden auf einer Ebene sind unter sich parallel.

4) Ist eine ebene Figur (Polygon, Kreis ꝛc.) mit einer Ebene parallel, so ist der Schatten jener Figur auf der Ebene ihr gleich (also ein gleiches Polygon, Kreis ꝛc.).

5) Wirft eine Fläche oder ein Körper auf eine Ebene seinen Schatten, so verändert dieser seine Form nicht, wenn man die Ebene parallel verschiebt.

§. 116.

Beispiele.

a) Schlagschatten des Cylinders auf die Grundebene (Fig. 151, Tafel X).

Die Reißebene m n schneidet die A.T. in d h und die Deckfläche des Cylinders in (a, a') und (b, b'); in dieser Ebene liegen zugleich die beiden durch a' und b' gehenden Lichtstrahlen; diese schneiden die Linie d h in d' und d''; diese Punkte gehören demnach dem Schlagschattenumriß der Deckfläche des Cylinders an.

Legt man an den Cylinder eine Berührungsebene c e e' parallel zur Strahlenrichtung, so liegen in dieser alle Lichtstrahlen welche den Cylinder berühren; die Berührungslinie (c, c' c'') ist demnach die Schattengrenze und c e e' ihr Schlagschatten. Dasselbe gilt auch von der Berührungsebene g f f'.

b) Es soll der Schlagschatten des zur G.T. parallelen Kreises (a b, a' b') (Fig. 152, Taf. X) auf die Umdrehungsfläche, deren Meridian o' m' p', und deren Axe (s, s' s'') ist, gezeichnet werden.

Der Schatten des Kreises (a b, a' b') auf die Grundrißtafel und auf jede mit ihr parallele Ebene ist wieder ein Kreis von gleicher Größe; man hat daher nur den Schlagschatten des Mittelpunktes zu bestimmen. Der durch den Mittelpunkt (c, c') des Kreises gehende Lichtstrahl schneidet die Ebene M N in (d, d'), folglich ist (d, d') der Schlagschatten des Kreismittelpunktes auf der Ebene M N, und der Schlagschatten des Kreises ist der um d beschriebene ihm gleiche Kreis e f. Die Ebene M N schneidet die Umdrehungsfläche in dem Parallelkreis (m n, m' n'); da die Kreise m n und e f in derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich in den Punkten g und h, die nothwendig dem gesuchten Schlagschattenumriß angehören müssen, da g und h auf dem Parallelkreis m n, also auf der Umdrehungsfläche liegen. — Durch wiederholte Anwendung von Hilfsebenen parallel zu M N (resp. zur G.T.) kann man sich nun eine hinreichende Anzahl von Punkten verschaffen, deren stetige Verbindung den Schlagschattenumriß des Kreises (a b, a' b') auf der Umdrehungsfläche ergibt.

c) Es soll der Schlagschatten des Kegels (S, S') auf die Kugel (o, o') construirt werden (Fig. 153, Taf. X).

Die Grundrißspur des durch die Kegelspitze (S, S') gehenden Lichtstrahls ist der Punkt s, folglich ist s der Schlagschatten der Kegelspitze. Da der Kegel mit seiner Grundfläche auf der G.T. steht, so sind die beiden Tangenten a s und b s der Schlagschattenumriß des Kegels auf der G.T. Da diese beiden Geraden der Schlagschatten der Schattengrenze des Kegels sind, so müssen nothwendig die beiden Mantellinien (a S, a' S') und (b S, b' S') eben diese Schattengrenzen sein.

Schneidet man die beiden Körper durch eine beliebige horizontale Hilfsebene M N, so erhält man die beiden Kreise (e f, e f') und (g h, g' h'). Der durch S' gehende Lichtstrahl schneidet die Ebene M N im Punkt s''', dessen Grundriß der Punkt s'' ist; folglich ist (s'', s''') der Schlagschatten der Kegelspitze auf die Ebene M N und der Schlagschatten des Kegels e' f' S' und c s'' d; da dieser Schatten und der Schnittkreis g h der Kugel in derselben Ebene M N liegen, sich demnach in den Punkten m und n schneiden, so müssen diese beiden Punkte nothwendig dem Schlagschattenumriß angehören; die Aufrisse zu m und n liegen auf M N und m' und n'. Auch hier wird man sich wieder, wie im vorigen Beispiel, durch Wiederholung des Verfahrens, d. h. durch paralleles Verschieben der Ebene M N sich eine solche Anzahl von Punkten verschaffen, daß der ganze Schlagschattenumriß mit Genauigkeit gezeichnet werden kann.

Um die Schlagschattengrenze der Kugel und ihren Schlagschatten auf die G.T. zu erhalten, projicire man dieselbe auf eine zur Strahlenrichtung parallele Seitenebene P Q. Die G.Spur des durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Lichtstrahls ist der Punkt t, dessen Seitenprojektion t''; die Seitenprojektion des Kugelmittelpunktes o'' liegt auf der von o auf P Q gefällten Senkrechten und wie bekannt so weit von P Q entfernt, als o' über dem Grundschnitt liegt; o'' t'' ist demnach der Seitenriß des durch (o, o') gehenden Lichtstrahls. Beschreibt man um o'' mit dem Radius der Kugel einen Kreis, so ist dieser die Seitenprojektion der Kugel.

Denkt man sich diese von den Lichtstrahlen berührt, so bilden letztere einen die Kugel umhüllenden Cylindermantel; die Berührung findet in einem größten Kreise statt, dessen Ebene senkrecht auf der Richtung der Lichtstrahlen steht. Da die Seitenebene mit diesen parallel ist, so ist jener Berührungskreis auf der Seitenebene senkrecht, und zeigt sich hier als der auf o'' t'' senkrechte Durchmesser u'' v''; er läßt sich sehr leicht in G. und A.Riß bringen, denn x y ist der Seitenriß des horizontalen Kugelumrisses, er schneidet den Kreis u'' v'' in o'', im Grundriß in i und k; desgleichen müssen die Grundrisse der zwei Punkte u'' und v'', auf o t in u und v liegen; da nun u v die kleine und i k die große Axe einer Elipse ist, so kann diese mit Hilfe derselben ohne Weiteres gezeichnet werden.

Da der Lichtstrahl gegen die G. und A.T. genau die gleiche Neigung (symmetrische Lage) hat, so muß nothwendig auch die Schattengrenze im A.R. mit der im G.R. ganz gleich und symmetrisch sein, d. h. die kleine Axe der Elipse liegt im A.R. wie im G.R. in der Richtung des Lichtstrahls, während die große Axe senkrecht darauf steht und gleich dem Kugeldurchmesser ist.

Nachdem auf diese Weise die Schattengrenze der Kugel bestimmt ist, erhält man den Schlagschatten auf der Grundebene unmittelbar dadurch, daß man die Schlagschatten einer hinreichenden Anzahl von Punkten der Schattengrenze aufsucht und diese stetig durch eine Curve mit einander verbindet.

d) Schlagschatten der Nische (Fig. 154, Tafel X). Der durch den Punkt (a, a') gehende Lichtstrahl schneidet die hohle Cylinderfläche der Nische in (c, c') und der durch den Punkt (b, b') gehende Lichtstrahl in (d, d'), folglich sind (c, c') und (d, d') Punkte des Schlagschattenumrisses.

Die zu der kreisförmigen in der Ebene P Q liegenden Kante (a b g, a b' g') parallele Ebene M N schneidet die Nische in dem Bogen (m n, m' p' n'); da der Halbkreis a' b' g' parallel zu M N ist, so ist der Schatten derselben auf M N ein Halbkreis von ganz gleicher Größe. Der durch den Mittelpunkt (o, o') gehende Lichtstrahl schneidet M N in (e, e'), folglich ist (e, e') der Schlagschatten des Mittelpunktes auf M N; beschreibt man nun um e'

mit o' a' als Halbmesser einen Kreis a'' h'' g'', so ist dieser der Schlagschatten des Kreises a' b' g' auf M N. Da in derselben Ebene M N auch der Schnittkreis m' p' n' liegt, so schneiden sie sich in h', folglich ist h' ein Punkt des gesuchten Schlagschattenumrisses. Auf gleiche Weise erhält man weitere Punkte, deren stetige Verbindung die Form des gesuchten Schattenumrisses liefert.

e) Man soll den Schlagschatten des Dreiecks (a b c, a' b' c) (Fig. 155, Tafel X) auf das in der G.T. liegende Prisma zeichnen.

Die G.Spur des durch die Spitze (b, b') des Dreiecks gehenden Lichtstrahls ist der Punkt s, er ist daher der Schlagschatten des Punktes (b, b') in der G.T. Verbindet man s mit a und b, so ist a s c der Schlagschattenumriß des Dreiecks in der G.T.

Legt man durch die Kante f f'' eine Ebene parallel zur G.T., so schneidet sie der durch (b, b') gehende Lichtstrahl im Punkt (n, n'), der demnach der Schlagschatten des Punktes (b, b') auf der durch f f'' gehenden Hilfsebene ist. Nach §. 115, 5 muß aber der Schlagschatten der Dreiecksspitze in dieser mit der G.T. parallelen Ebene, d. h. der Winkel 3 n 4 dem Winkel a s c gleich oder 3 n ‖ a s und 4 n ‖ c s sein. Zieht man demnach durch n 3 n ‖ a s und 4 n ‖ c s, so ist der Winkel 3 n 4 der Schlagschatten des Dreiecks (a b c, a' b' c') auf der durch f' f'' gehenden Ebene; dieser Schatten 3 n 4 schneidet die Kante f, eben weil sie in derselben Ebene liegt, in den Punkten 3 und 4, deren Aufriß auf f' f'' in 3' und 4' liegt, die Punkte (3, 3') und (4, 4') sind daher Punkte des Schlagschattenumrisses. Auf gleiche Weise findet man auch die auf den übrigen Kanten des Prismas liegenden Punkte des Schlagschattenumrisses und durch entsprechende geradlinige Verbindung derselben die vollständige Form des Umrisses.

Bemerkung. Betrachten wir das Polygon d' e' f' g' h', d. h. die Grundfläche des Prismas als ein einer Curve einbeschriebenes Vieleck, und diese Curve als die Grundfläche eines mit der G.T. parallelen Cylinders, so wäre offenbar die Construktion des Schlagschattens vom Dreieck (a b c, a' b' c') auf den Cylinder

von der vorigen in Nichts verschieden, denn f' f'', e' e'' .... wären nunmehr Mantellinien des Cylinders, in welchen er von der horizontalen Hilfsebene geschnitten würde, und 3', 4', 5', 6' ... wären Punkte des Schlagschattenumrisses auf diesen Mantellinien wie zuvor auf den Prismenkanten; nur müßten selbstverständlich die Punkte 2', 4', 6', 8' und 1' 3' 5' 7' ... durch stetige Curven mit einander verbunden werden.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Berichtigungen.

Pag.	19	Zeile	14	von	oben	lies	**p' q'** statt p, q.
„	40	„	13	„	unten	„	**g z** „ y z.
„	53	„	14	„	unten	„	**t** „ A.
„	56	„	14	„	unten	„	**M A** „ M_0 A.
„	69	„	18	„	oben	„	„**G.T. ſenkrechte Ebene g k**“ anſtatt „A.T. parallele Ebene g' k'.“
„	70	„	2	„	oben	„	**e' t' b'** ſtatt e' A' b'.
„	71	„	2, 4 u. 5		von oben	lies	**a p c d** ſtatt a b c d.
		„	6		von unten	lies	**a p** u. **p c** ſtatt a b u. b c.
		„	8	„	unten	„	**a' a''** ſtatt a a''.
„	72	„	8	„	oben	„	**A' A'''** ſtatt A' A.
		„	7	„	unten	„	**c p a** ſtatt c b a.
„	73	„	1	„	oben	„	**p β** ſtatt b β.
„	74	„	13	„	oben	„	**a' b' b''** ſtatt a' b' c'.
		„	5	„	unten	„	**c'' m'** ſtatt b'' a', b' a'.
		„	4	„	unten	„	**p' e'** ſtatt p' f'.
„	78	„	9	„	oben	„	**n h m** ſtatt n d m.
„	80	„	13	„	oben	„	**i''** ſtatt i'.
„	81	„	7	„	oben	„	**n l o** ſtatt n t o.
„	86	„	14	„	unten	„	„**Horizont-Eb.**“ ſtatt „Horizontal-Eb.“
„	87	„	5	„	oben	„	**a p** ſtatt p.
„	90	„	8	„	oben	„	„**des Hauptſtrahls**“ ſtatt „der Hauptlinie“.
		„	9	„	oben	„	„**mit**“ ſtatt „aus“.
„	92	„	6	„	oben	„	**o' f** ſtatt o' f'.
		„	7	„	oben	„	**f** ſtatt f'.
„	93	„	9 u. 10		von unten	lies	**b' d'** ſtatt b d'.
„	103	„	16		von oben	lies	„**iſt** c s'' d“ ſtatt „und c s'' d“.
		„	21	„	oben	„	„**in**“ ſtatt „und“.
„	105	„	5	„	oben	„	**h''** ſtatt h'.
		„	13	„	oben	„	**c** ſtatt b.

Bibliothek Passau

Fig. 1.

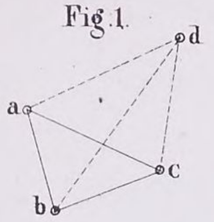


Fig. 2.

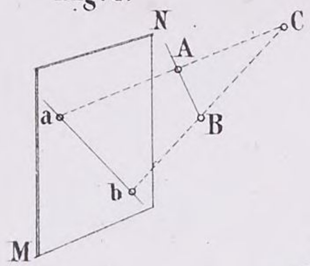


Fig. 3.

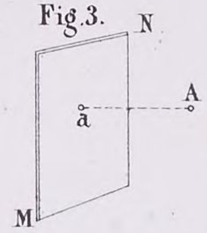


Fig. 4.

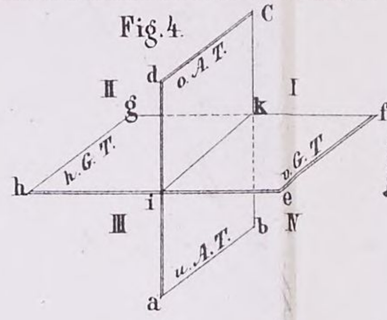


Fig. 5.

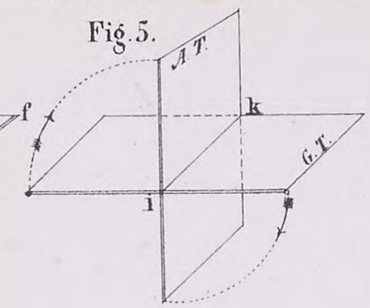


Fig. 6.

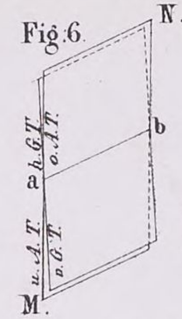


Fig. 7.

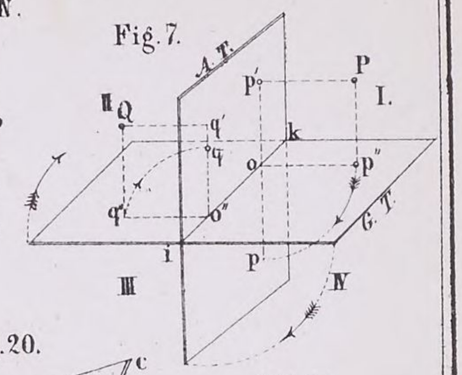


Fig. 8.

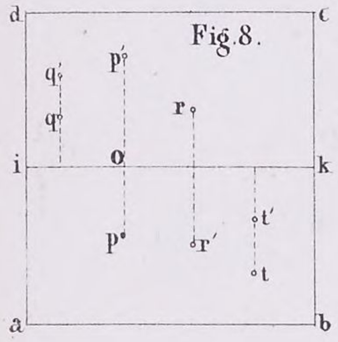


Fig. 9.

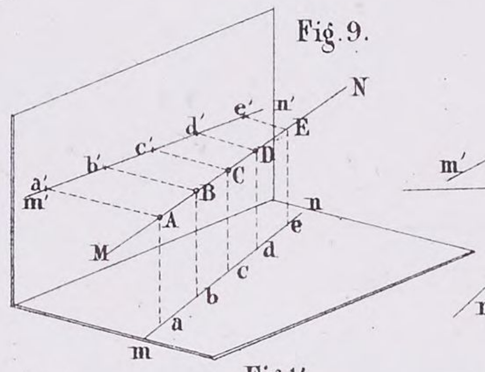


Fig. 10.

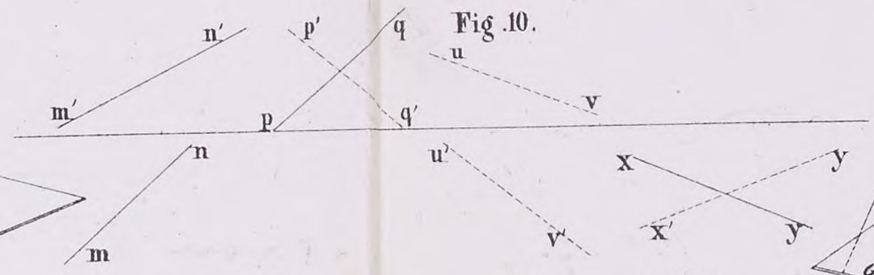


Fig. 20.

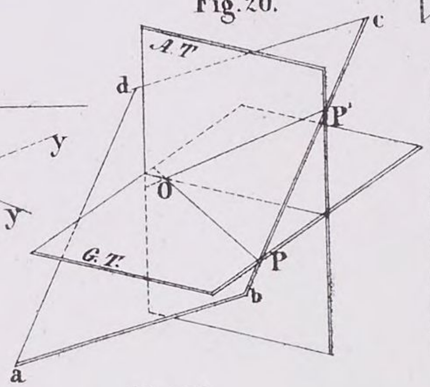


Fig. 21.

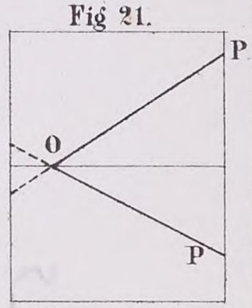


Fig. 11.

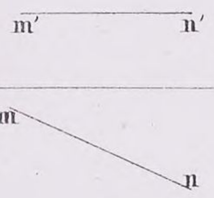


Fig. 12.

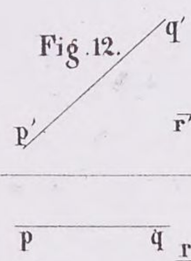


Fig. 13.

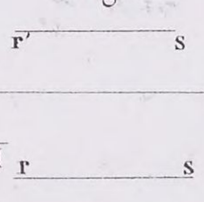


Fig. 14

Fig. 15.

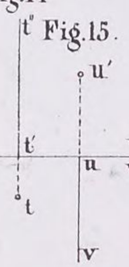


Fig. 16.

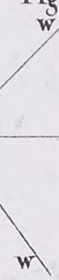


Fig. 17.

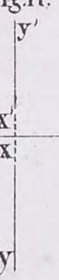


Fig. 18.

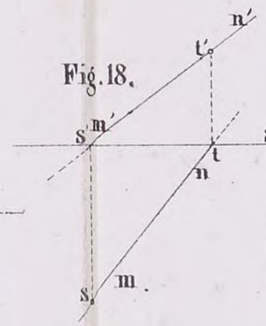


Fig. 19.

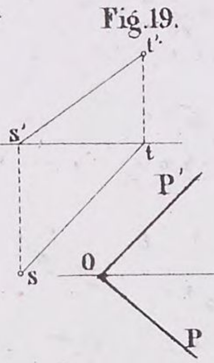


Fig. 29.

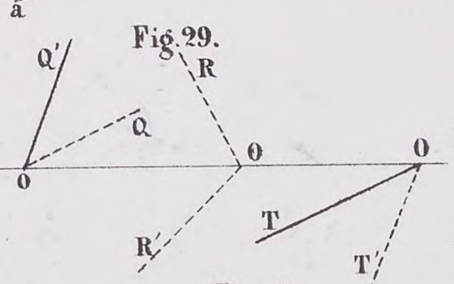


Fig. 30.

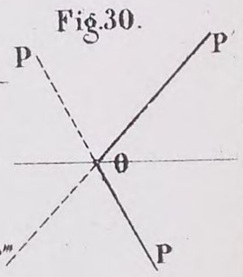


Fig. 22.

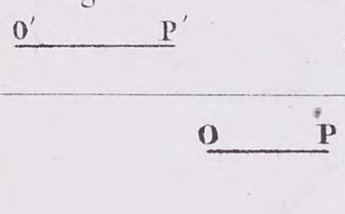


Fig. 23.

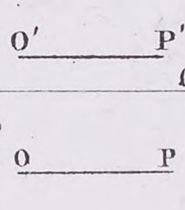


Fig. 24.

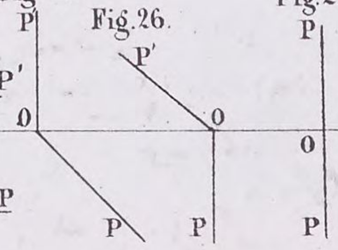


Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

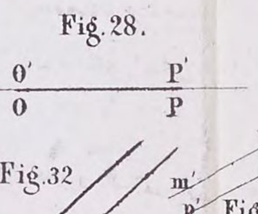


Fig. 32

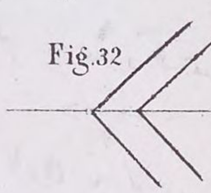


Fig. 33.

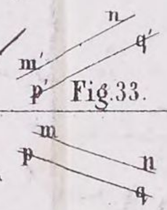


Fig. 34.

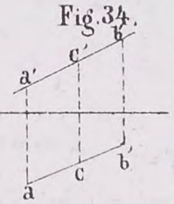


Fig. 35.

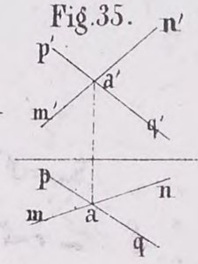


Fig. 39.

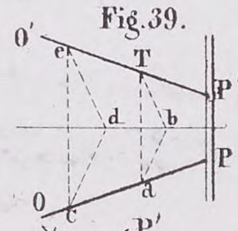


Fig. 36.

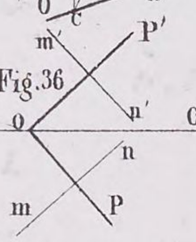


Fig. 37.

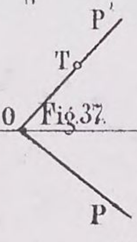


Fig. 38.

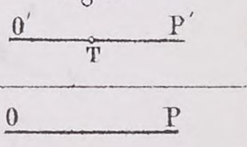


Fig. 31.

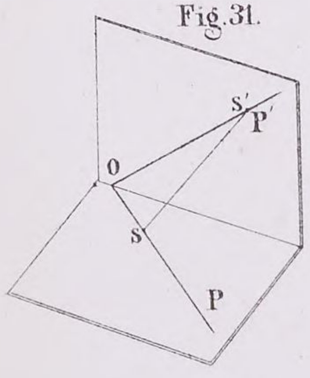


Fig. 31.a

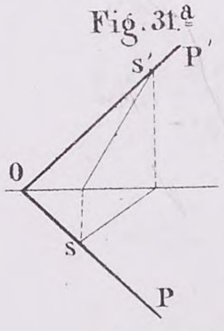


Fig. 40.

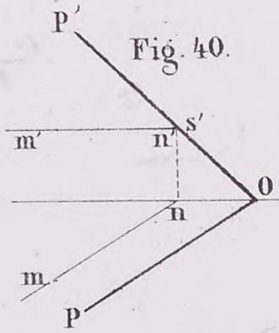


Fig. 41.

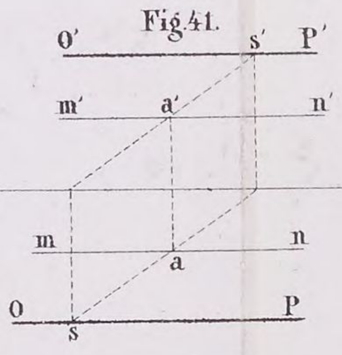


Fig. 42.

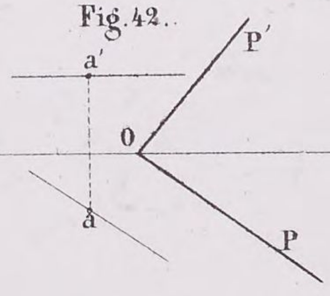


Fig. 43.

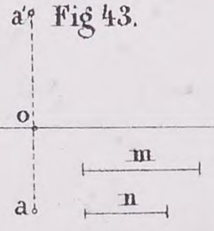
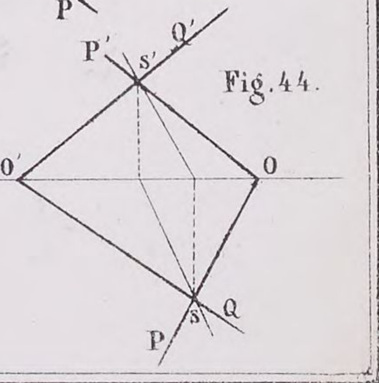


Fig. 44.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 45.

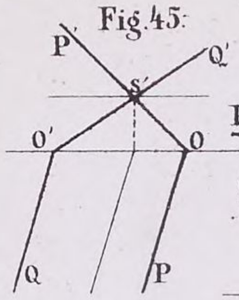


Fig. 46.b

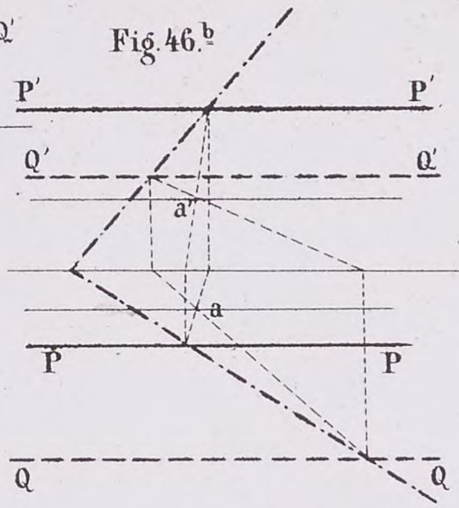


Fig. 46.a

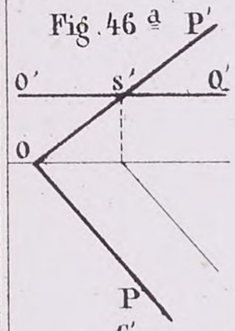


Fig. 47.

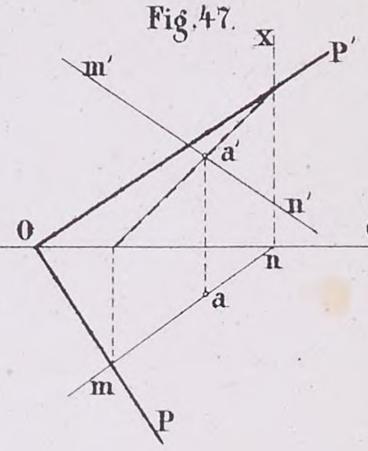


Fig. 48.

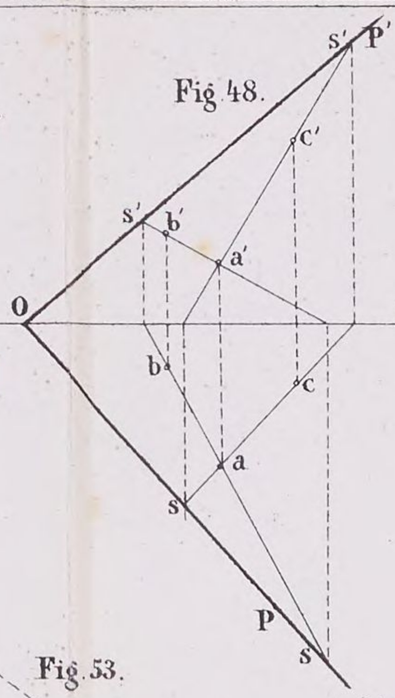


Fig. 49.

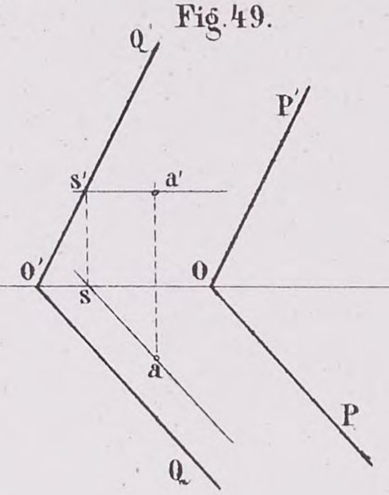


Fig. 50.

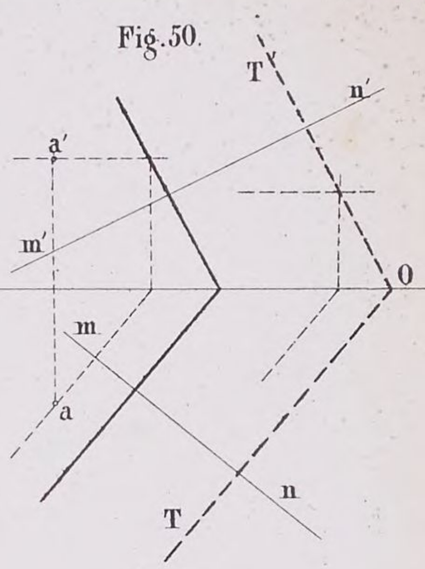


Fig. 51.

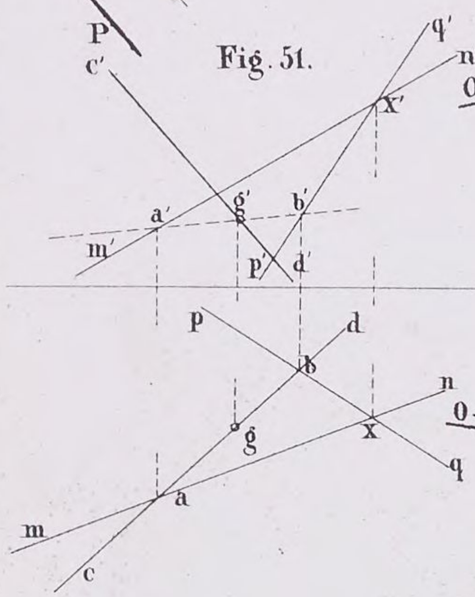


Fig. 52.

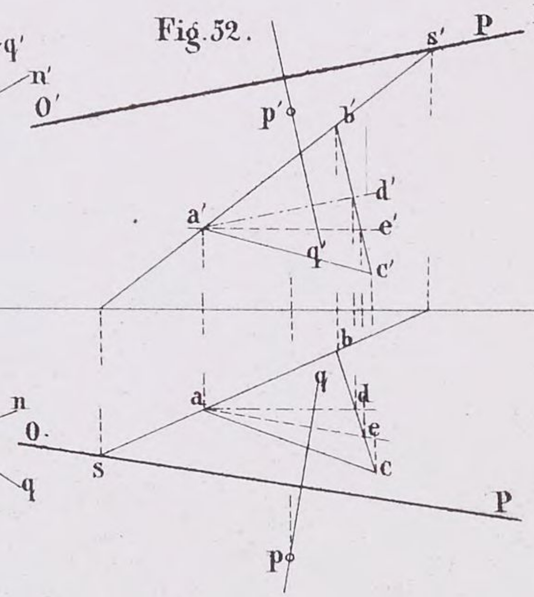


Fig. 53.

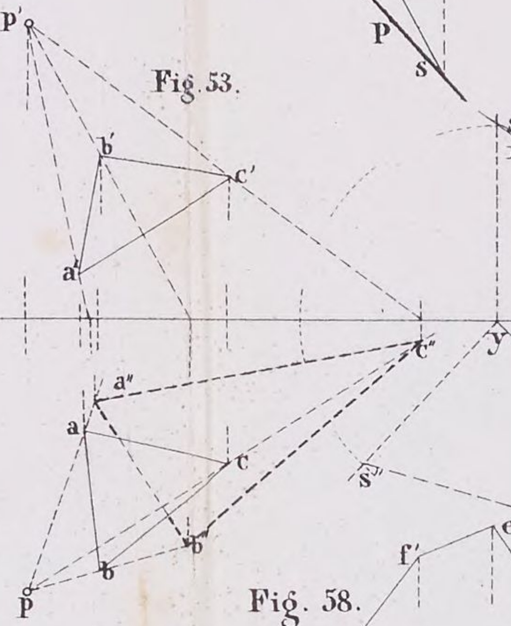


Fig. 54.

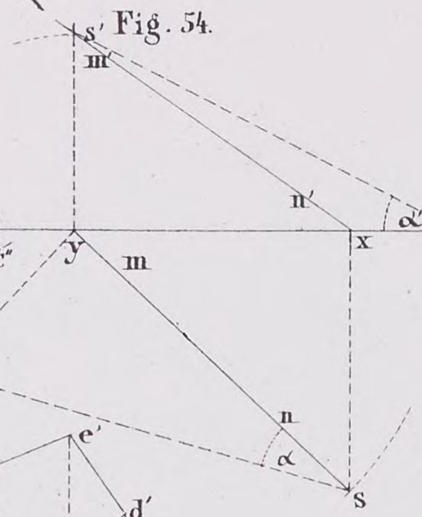


Fig. 55.

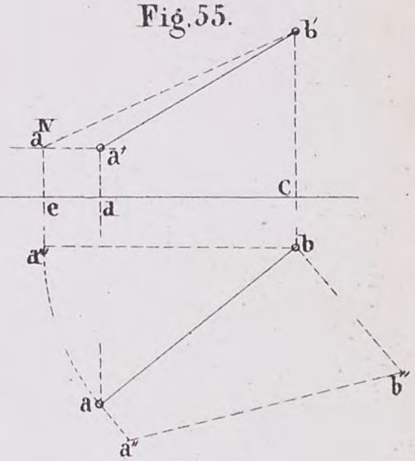


Fig. 58.

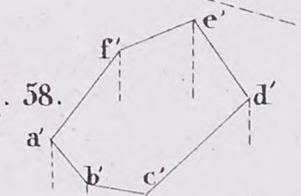


Fig. 55.a

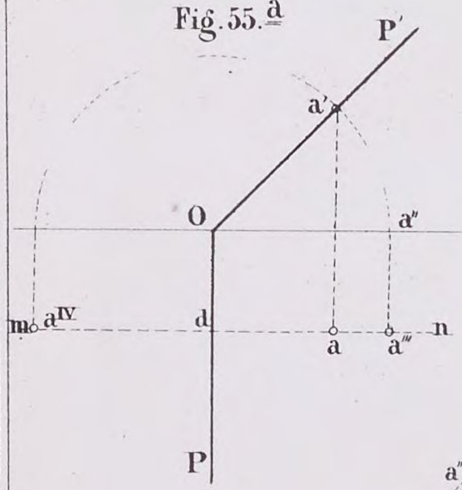


Fig. 56.

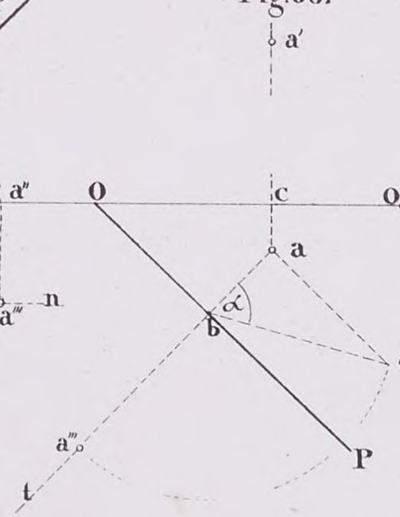
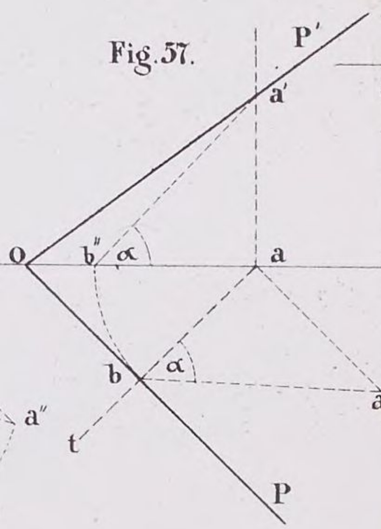


Fig. 57.



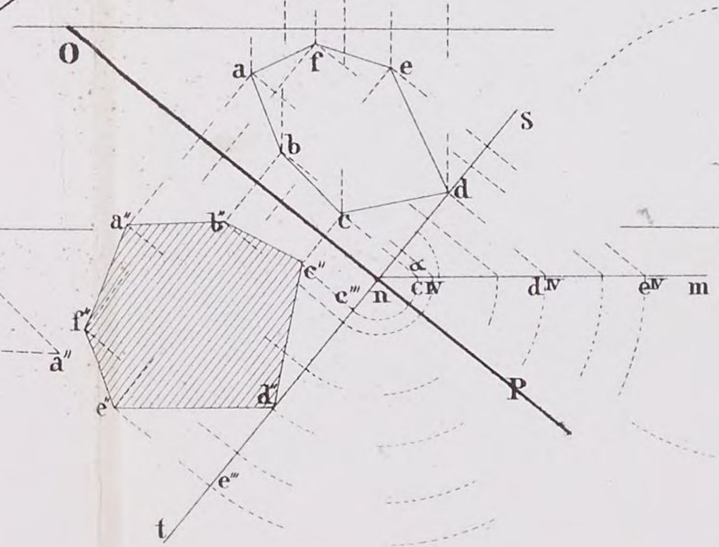
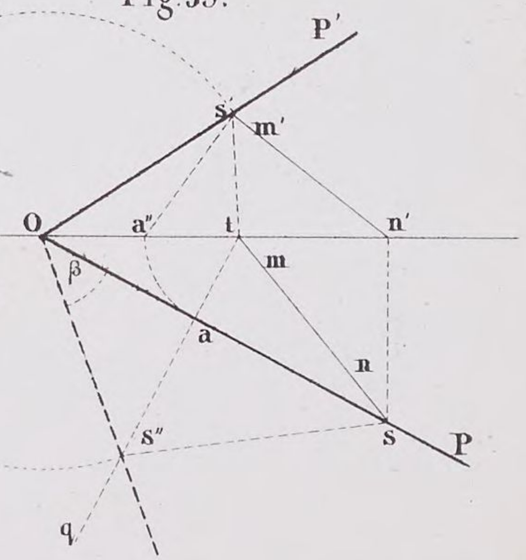


Fig. 59.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 60.

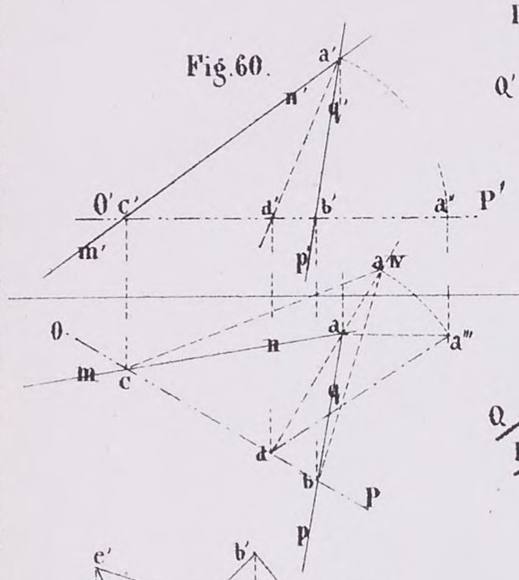


Fig. 61.

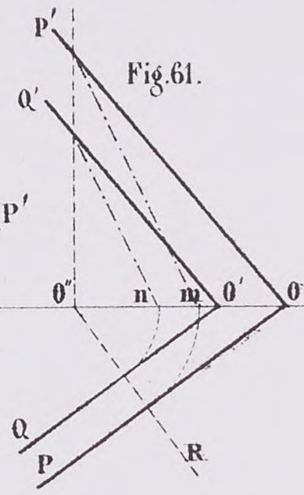


Fig. 62.

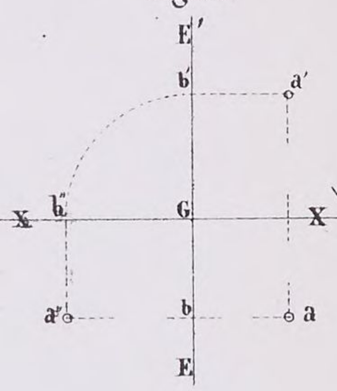


Fig. 63.

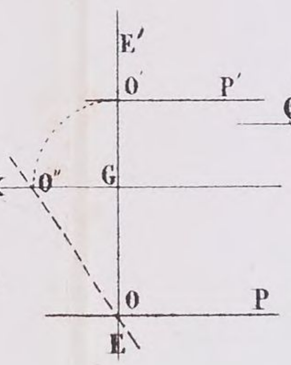


Fig. 64.

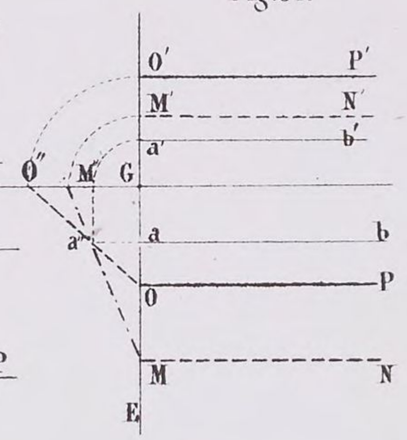


Fig. 65.

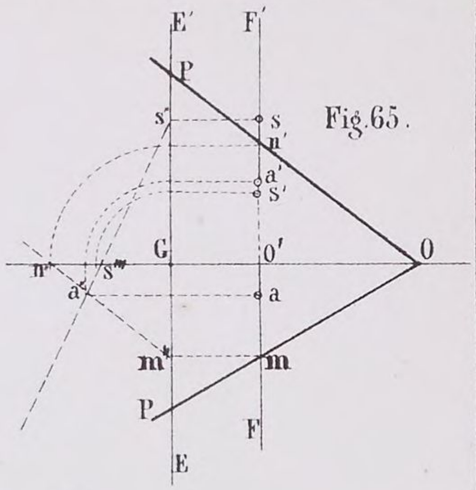


Fig. 66

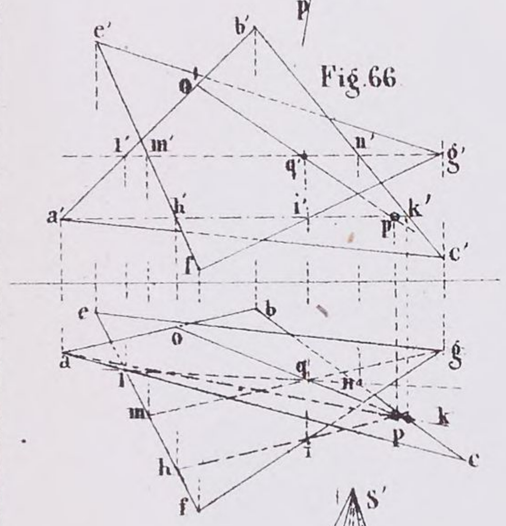


Fig. 67.

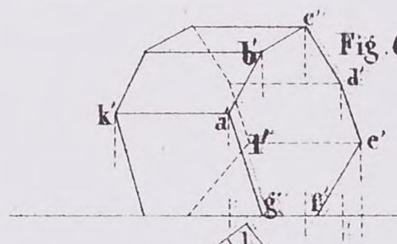


Fig. 68.

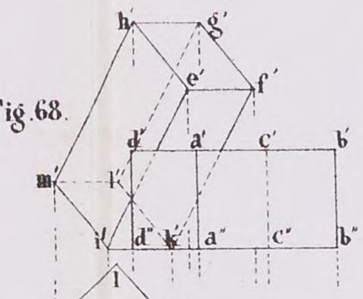


Fig. 69.

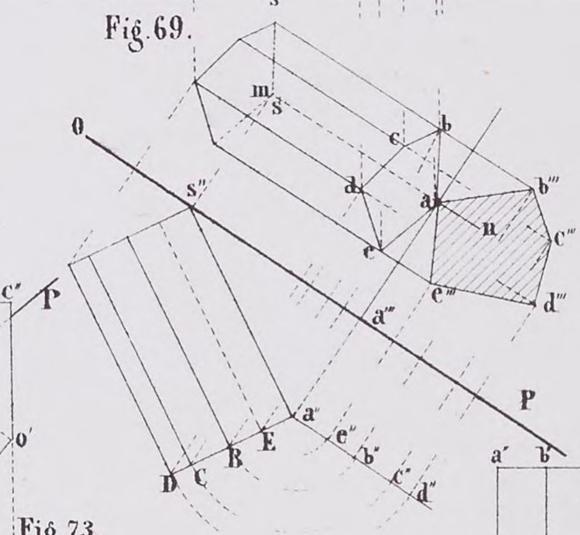


Fig. 70.

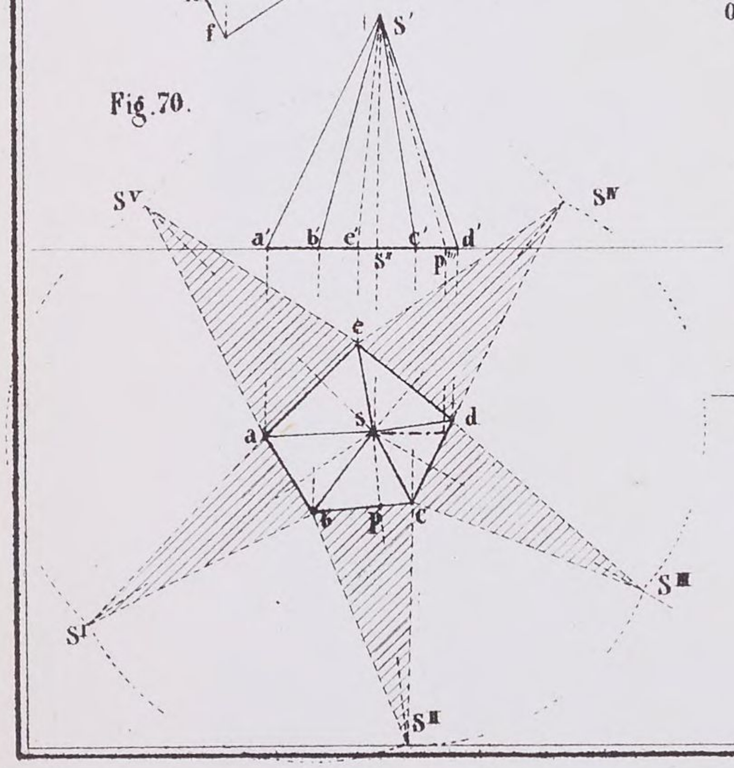


Fig. 73 a.

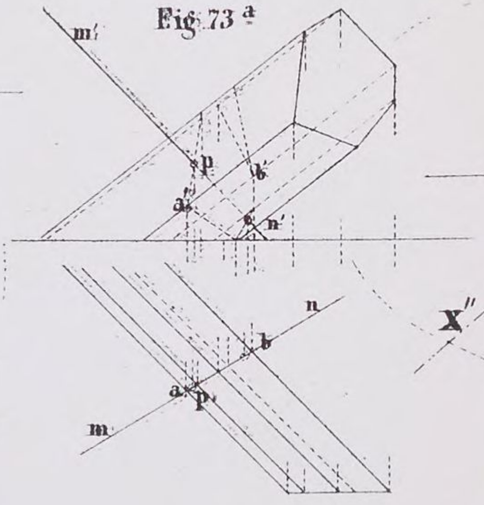


Fig. 73.

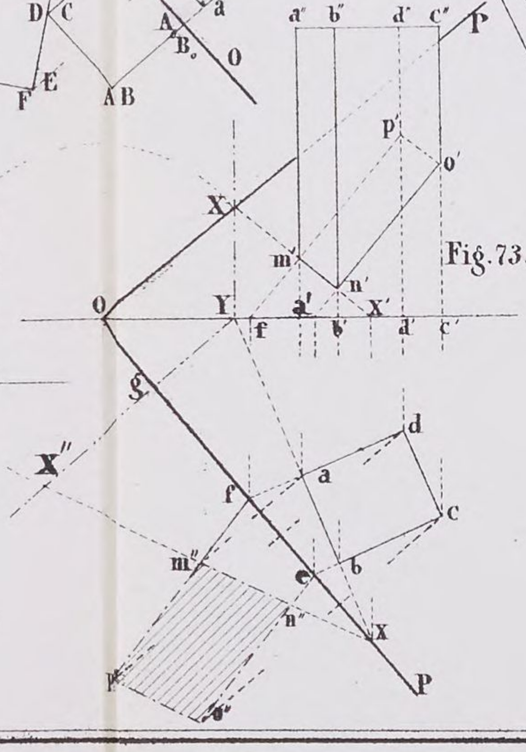
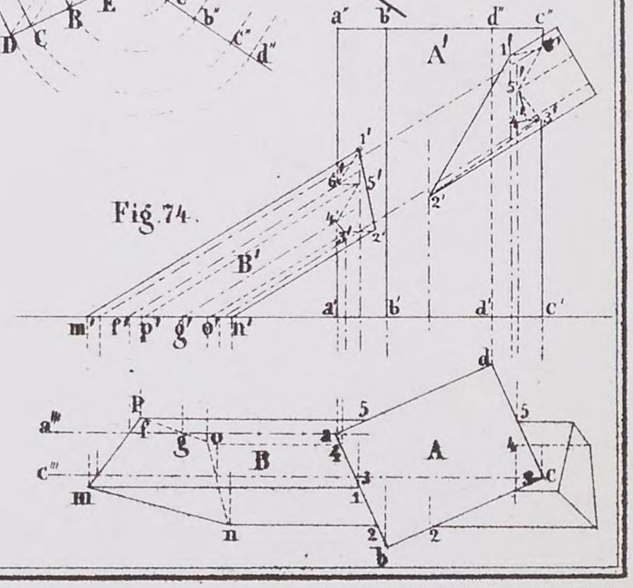


Fig. 74.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 71.

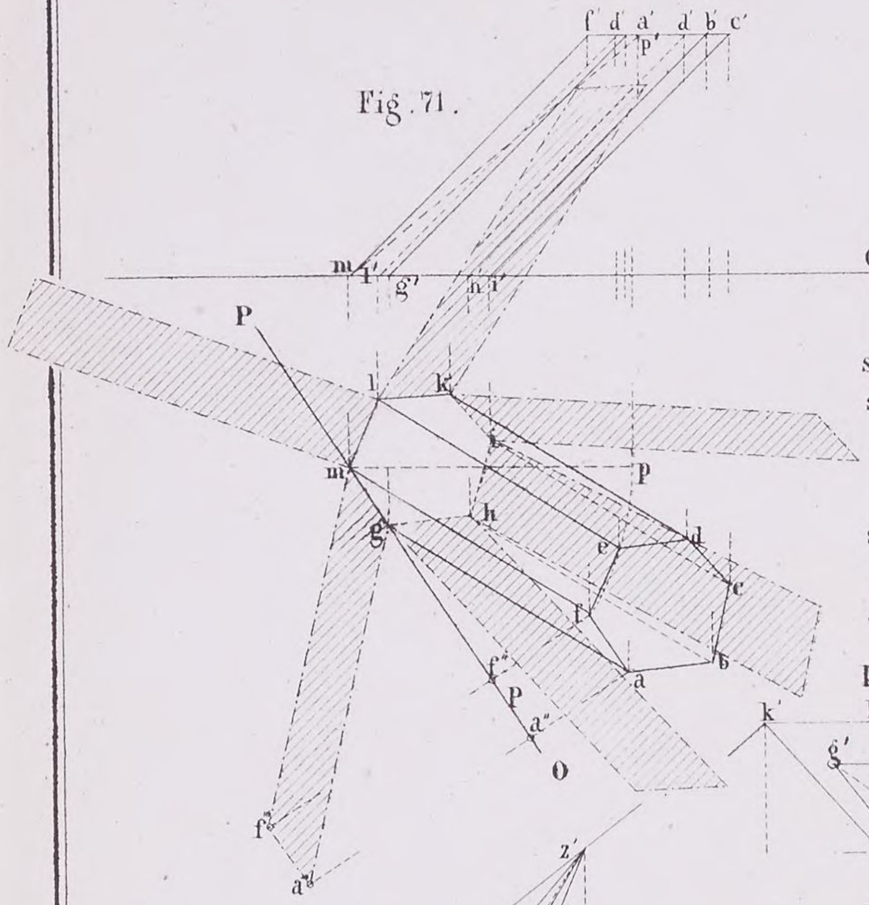


Fig. 72.

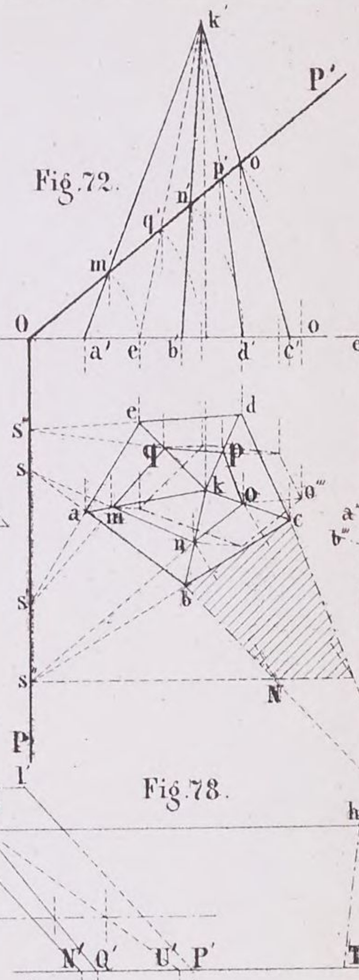


Fig. 73.

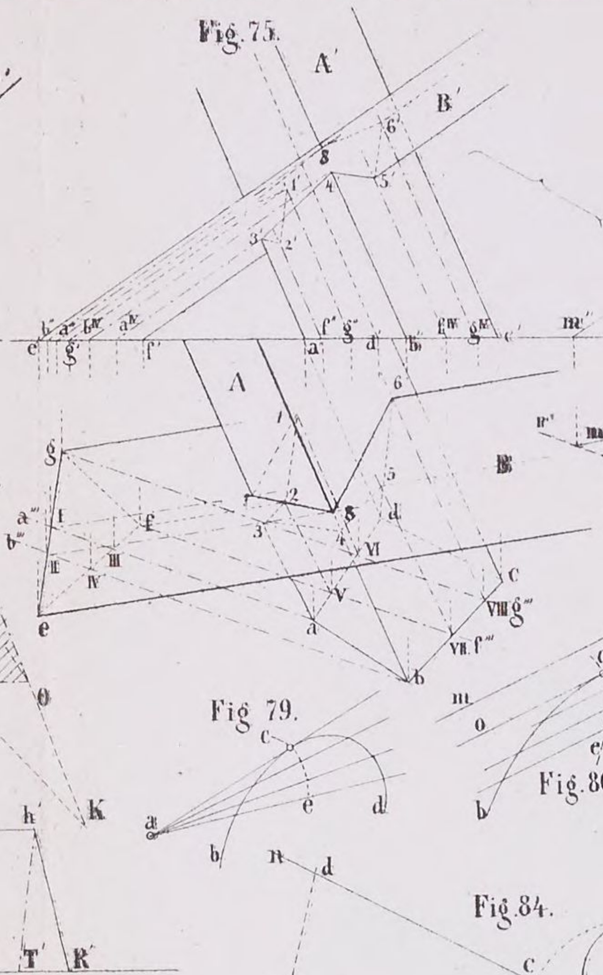


Fig. 77.

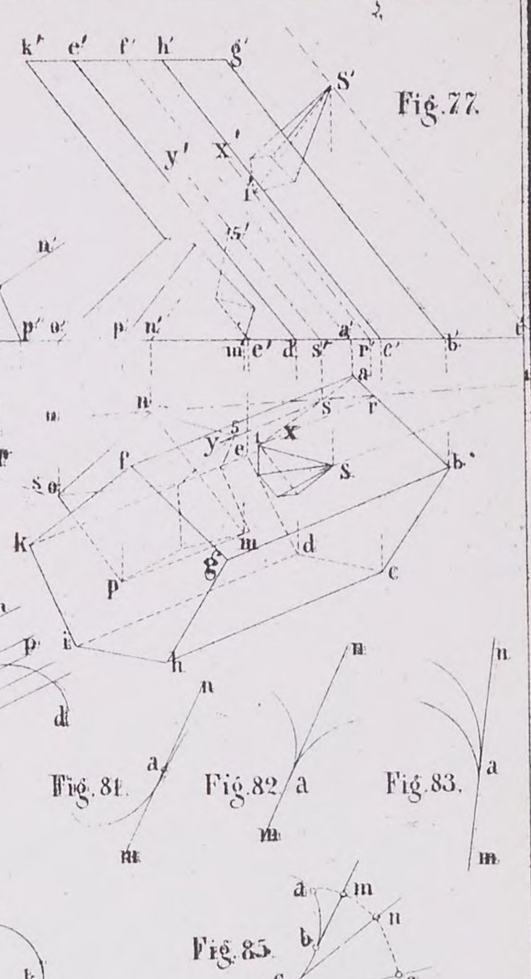


Fig. 78.

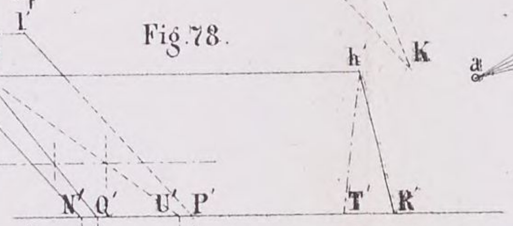


Fig. 79.

Fig. 80.

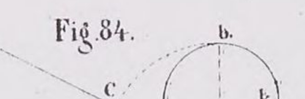


Fig. 81.

Fig. 82.

Fig. 83.

Fig. 84.

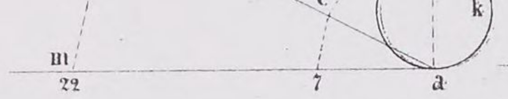


Fig. 85.

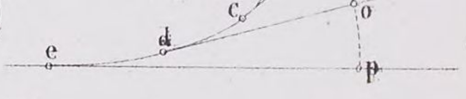


Fig. 76.

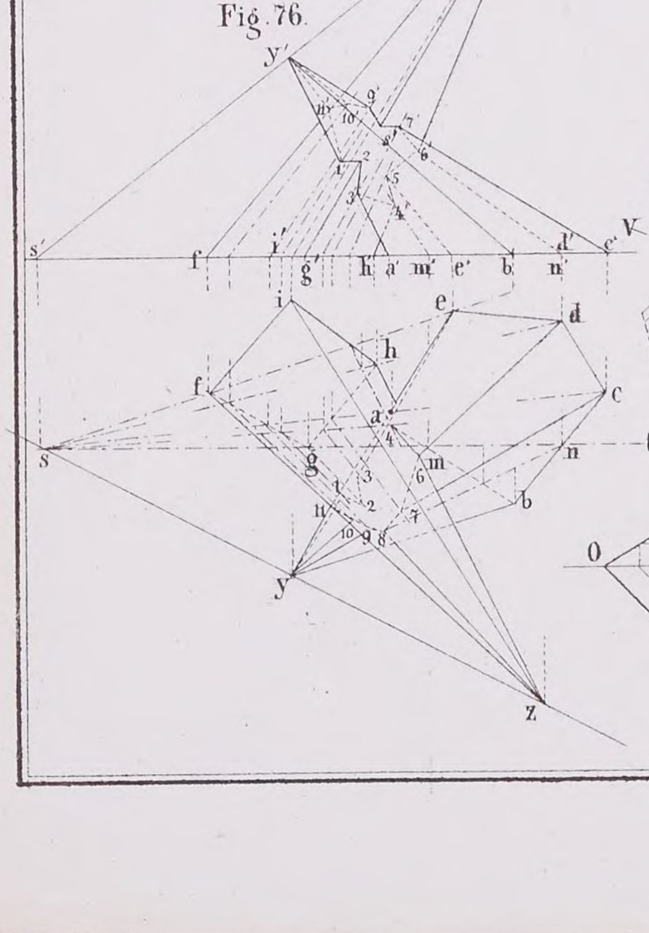


Fig. 86.

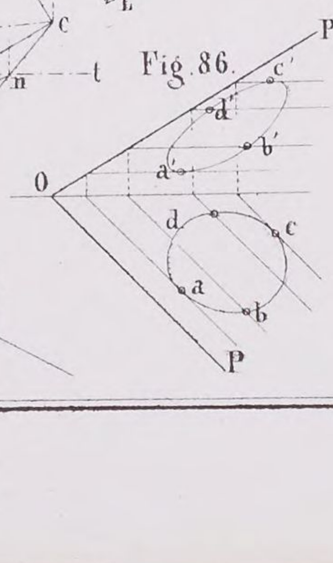


Fig. 87.

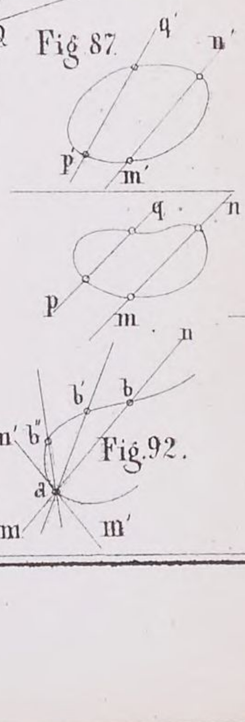


Fig. 88.

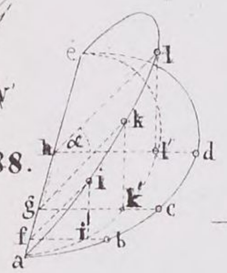


Fig. 89.

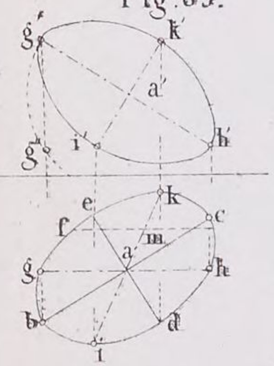


Fig. 92.

Fig. 93.

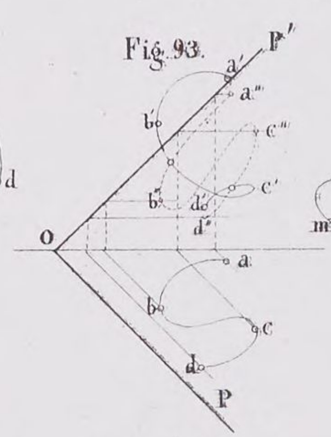


Fig. 91.

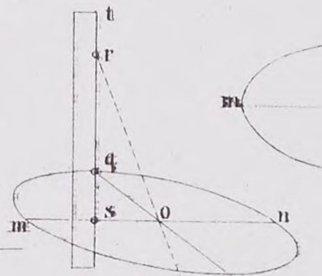


Fig. 90.

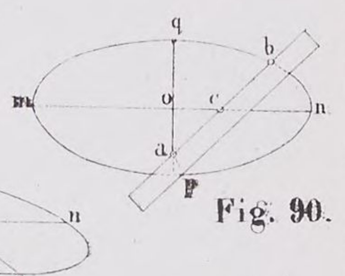


Fig. 99.

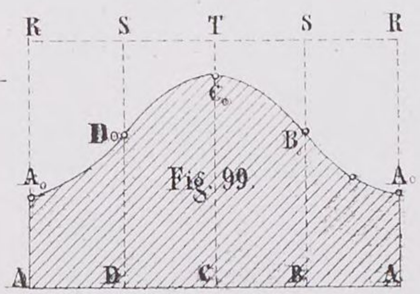
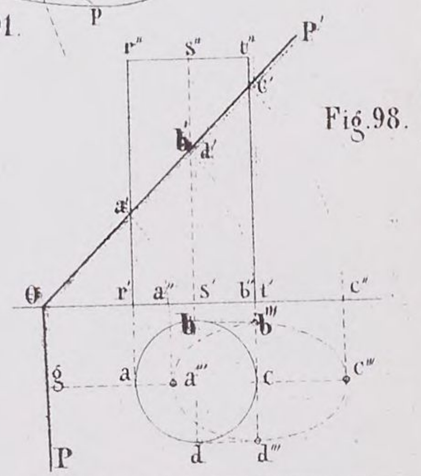


Fig. 98.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 94.

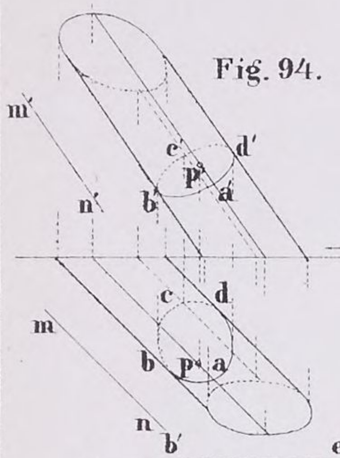


Fig. 95.

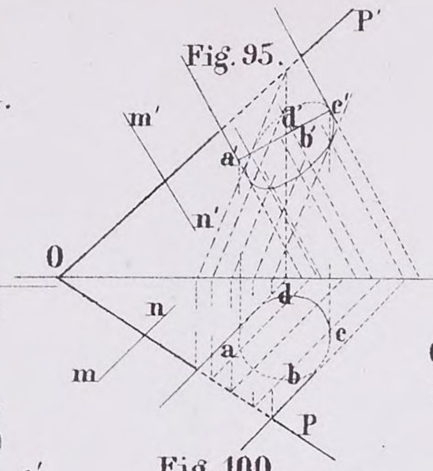


Fig. 96.

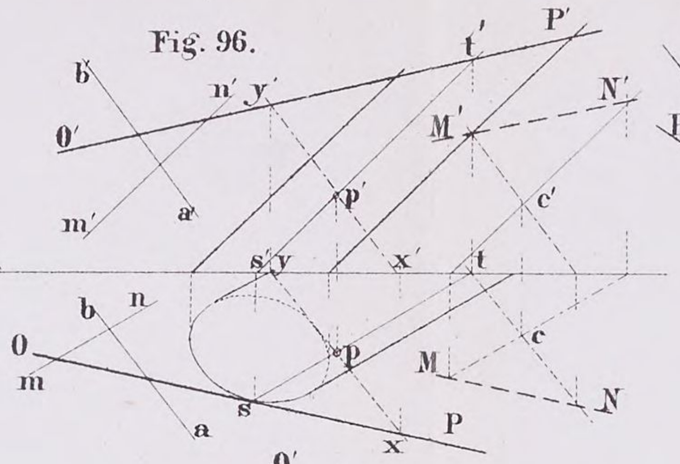


Fig. 97.

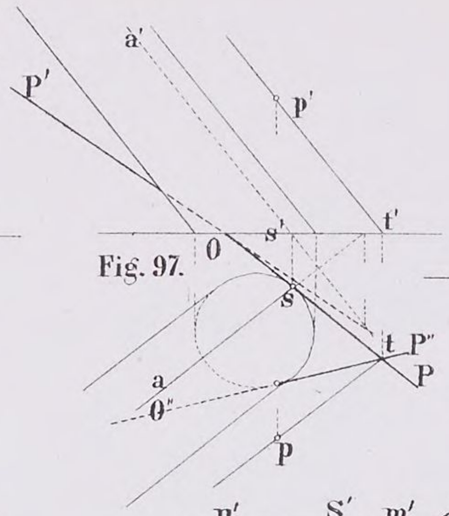


Fig. 102.

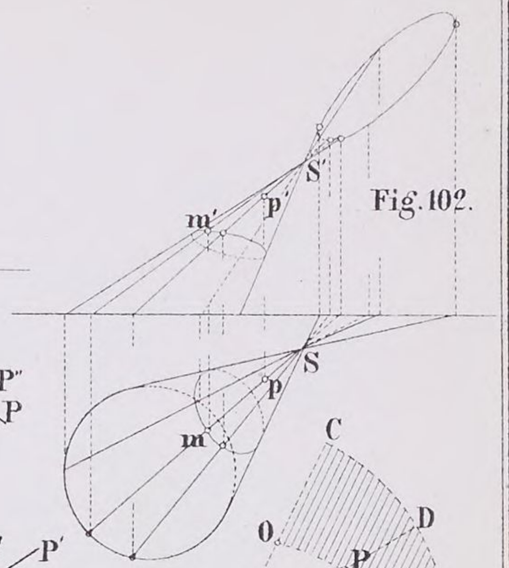
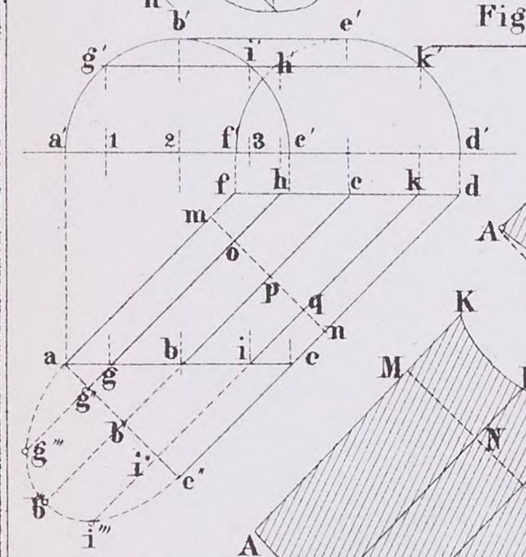


Fig. 100.



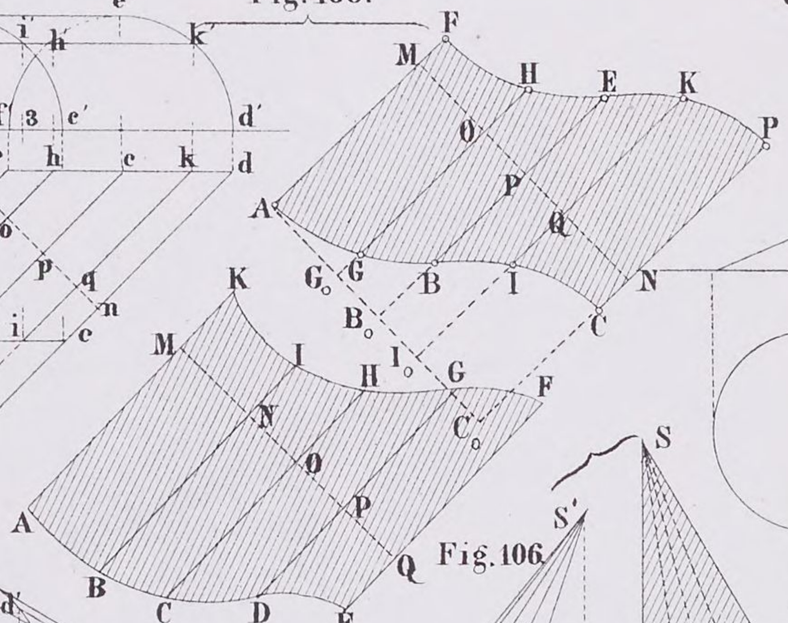


Fig. 103.

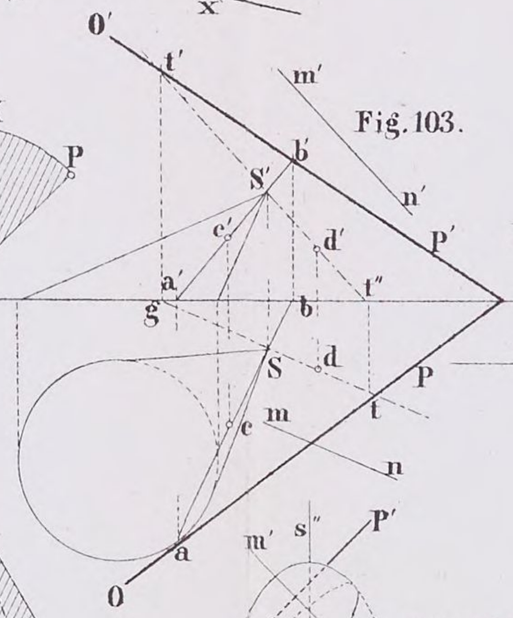


Fig. 104.

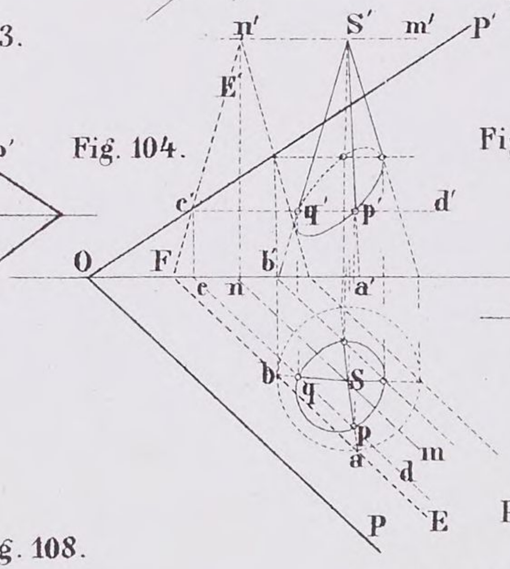


Fig. 105.

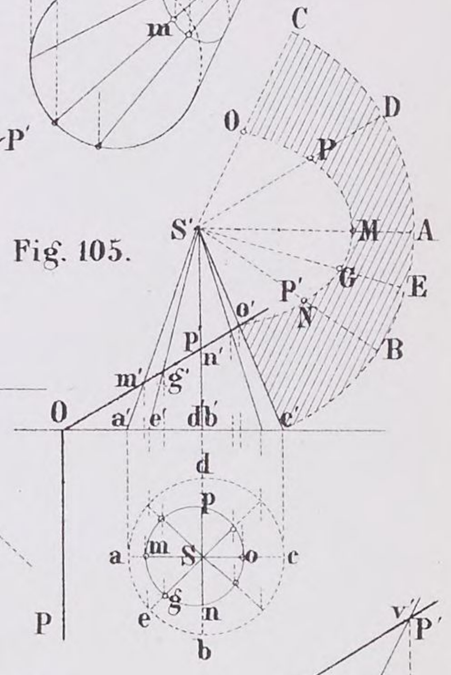


Fig. 101.

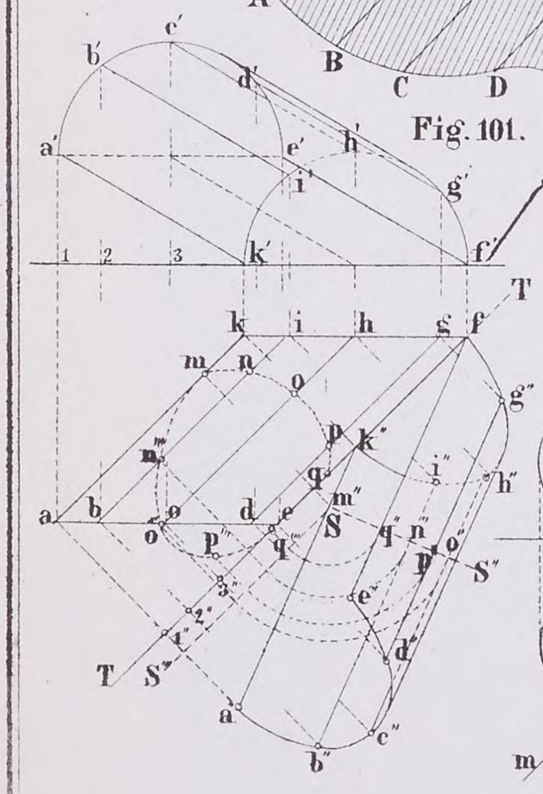


Fig. 106.

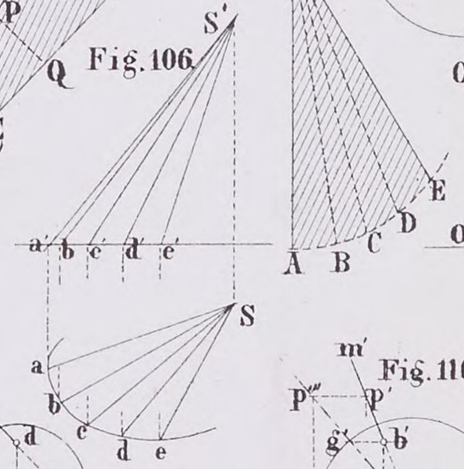


Fig. 110.

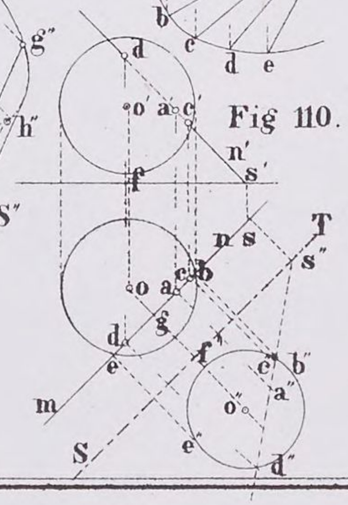


Fig. 110ª.

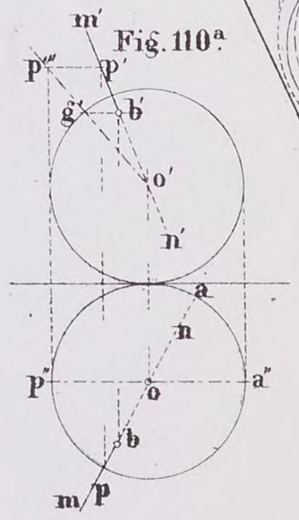


Fig. 108.

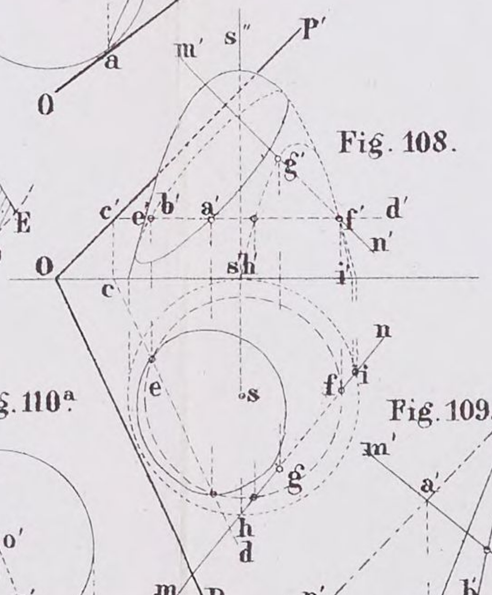


Fig. 109.

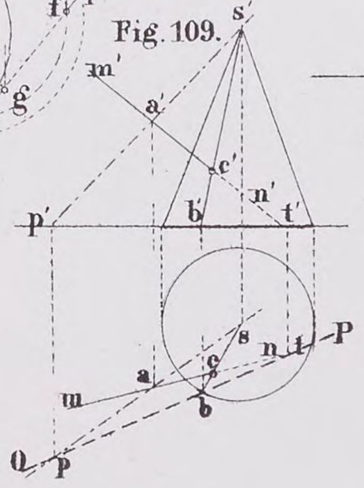


Fig. 107.

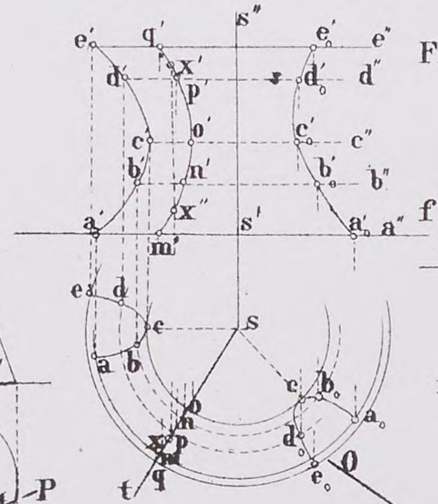
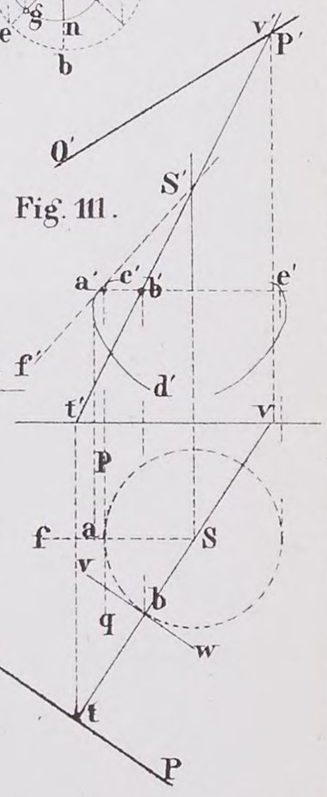


Fig. 111.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 111a

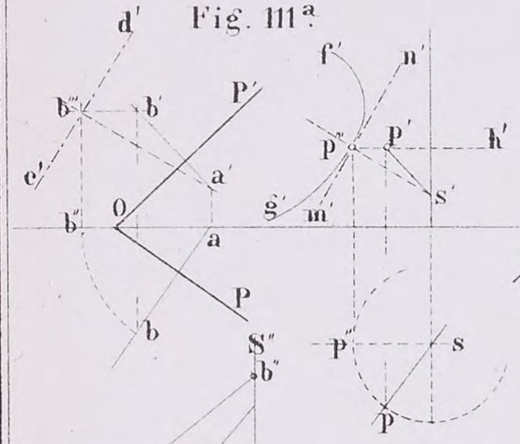


Fig. 112.

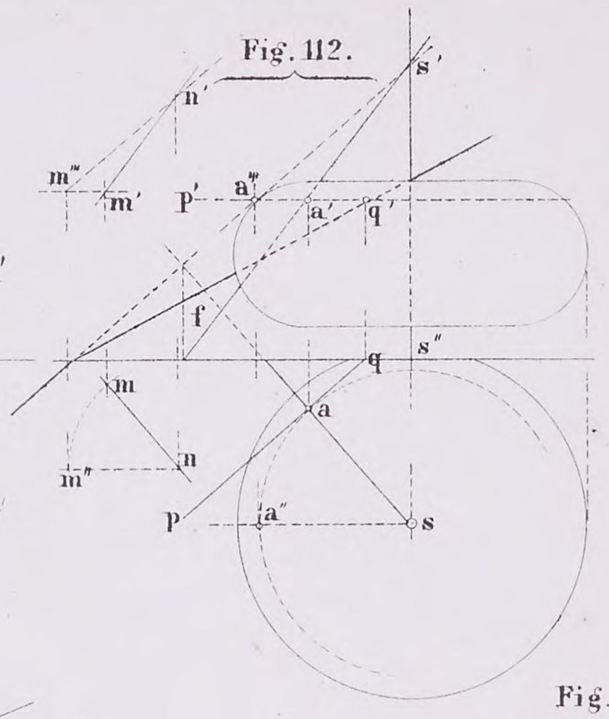


Fig. 113.

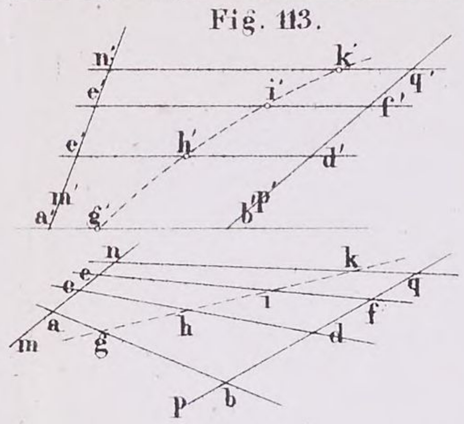


Fig. 114.

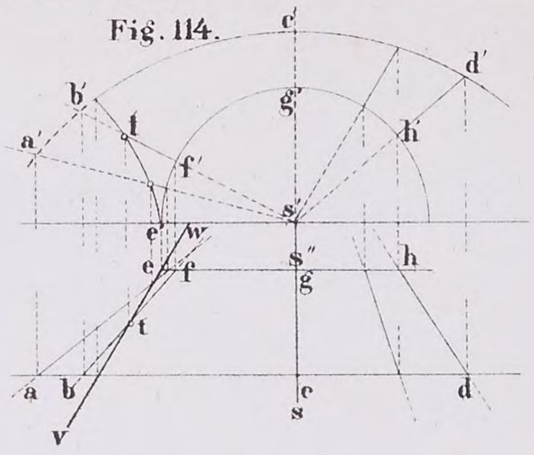


Fig. 115.

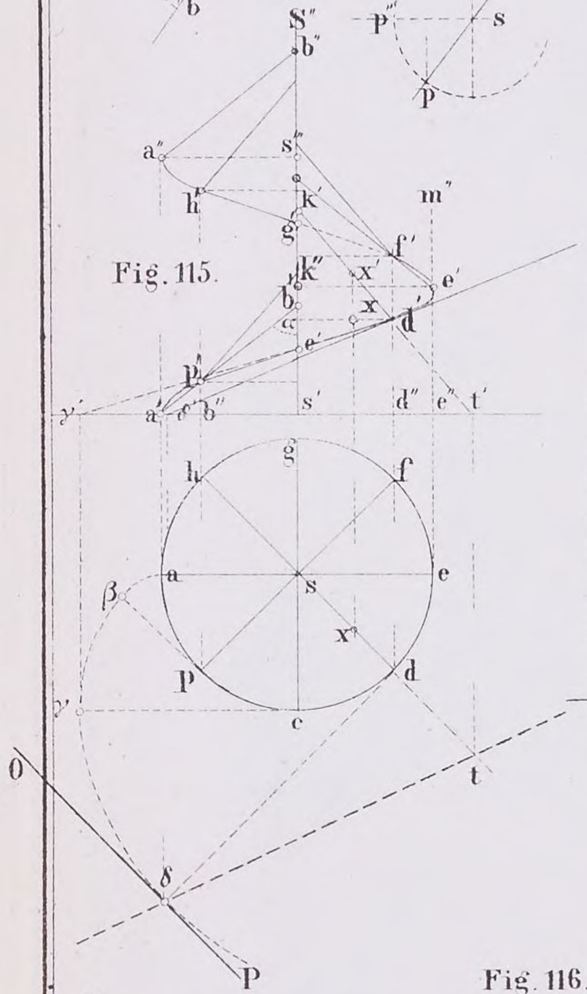


Fig. 116.

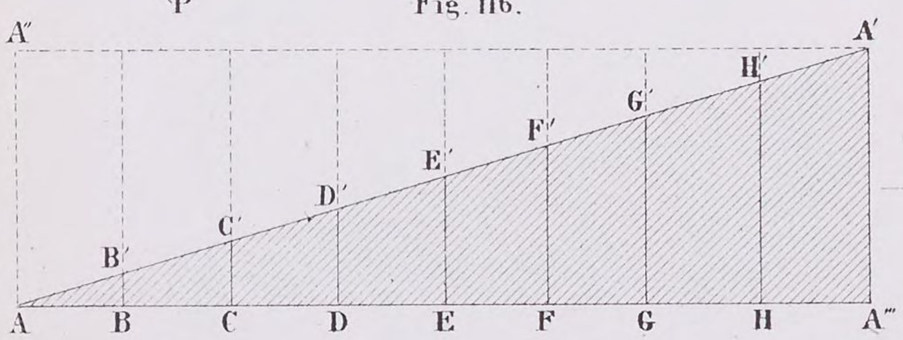


Fig. 117.

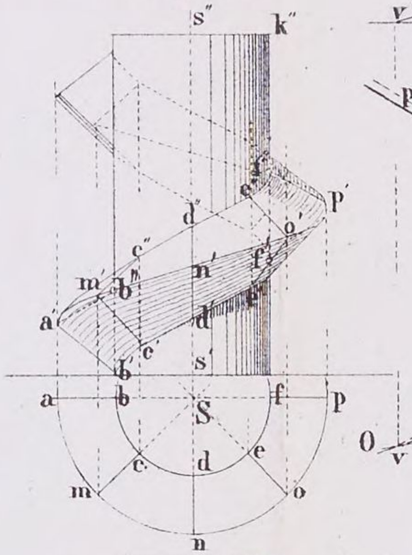


Fig. 118.

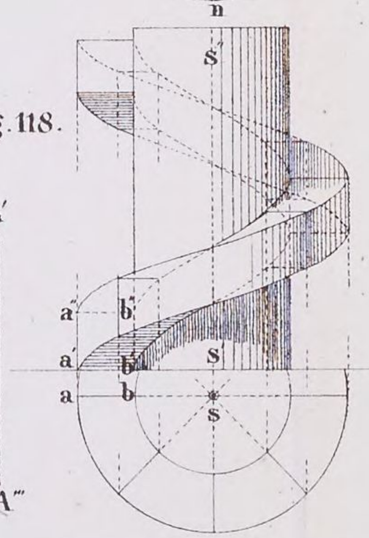


Fig. 119.

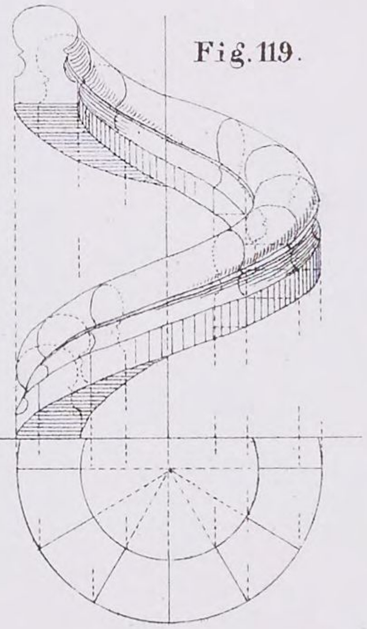


Fig. 120.

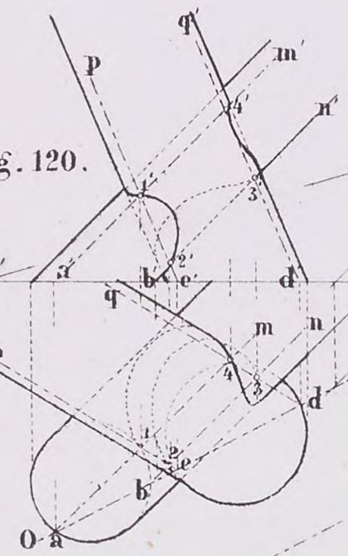


Fig. 121.

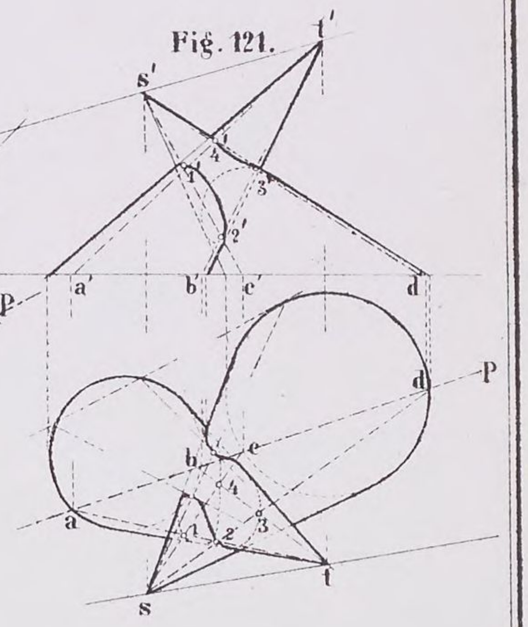


Fig. 122.

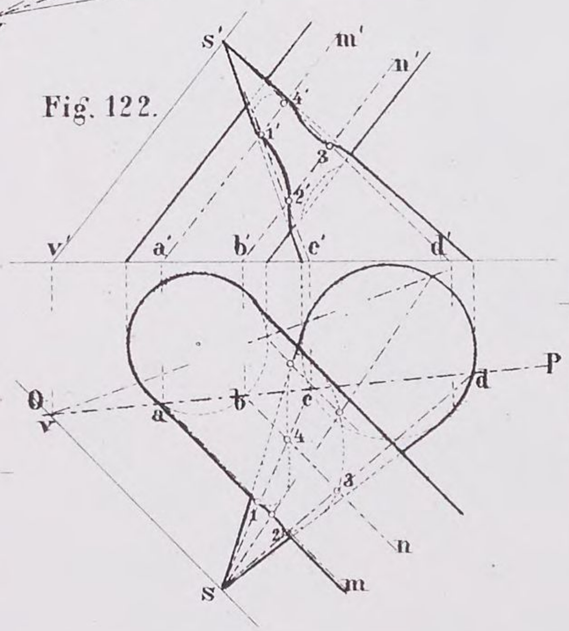
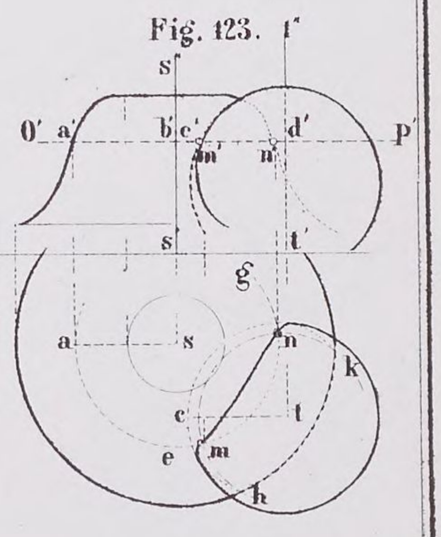


Fig. 123.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 124.

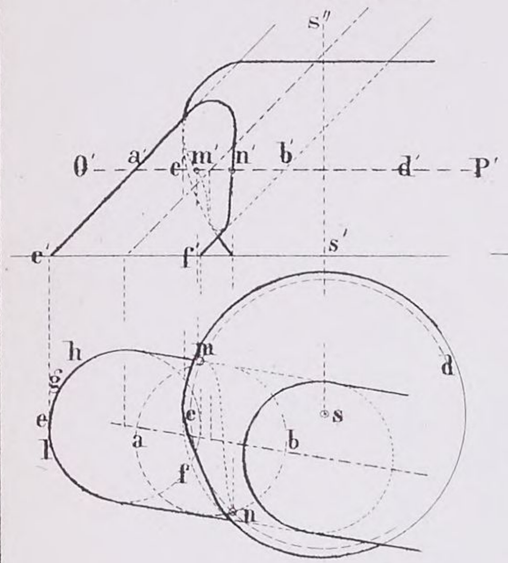


Fig. 125.

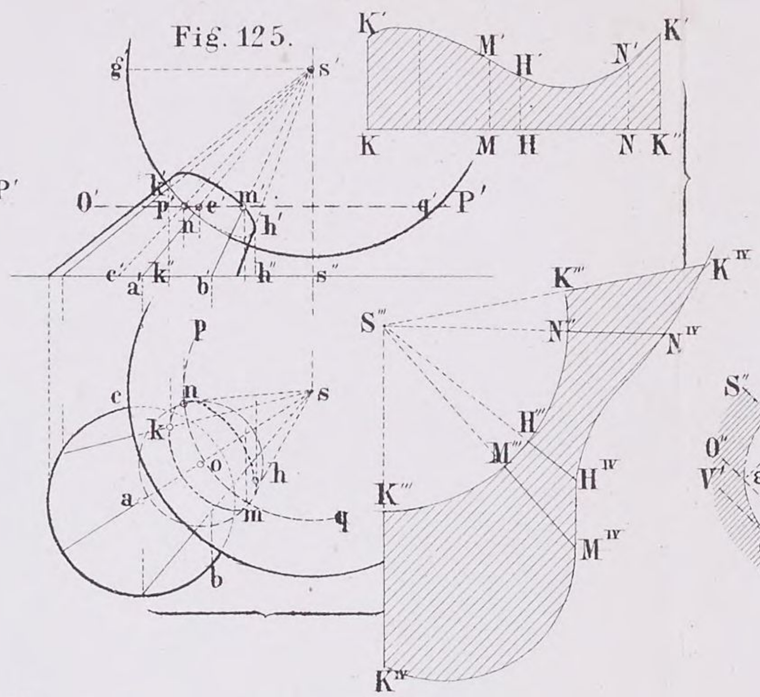


Fig. 126.

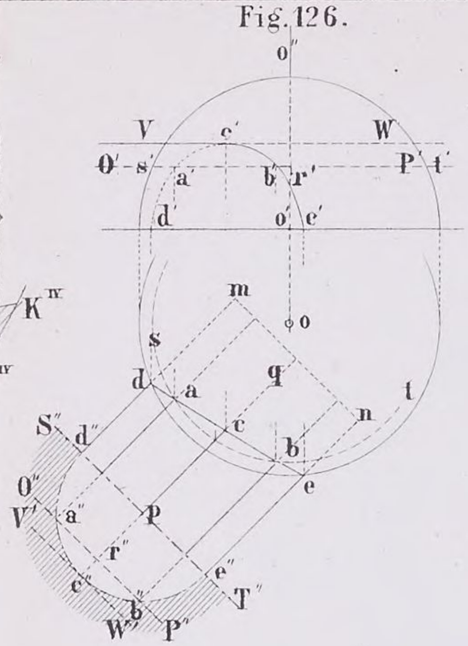


Fig. 127.

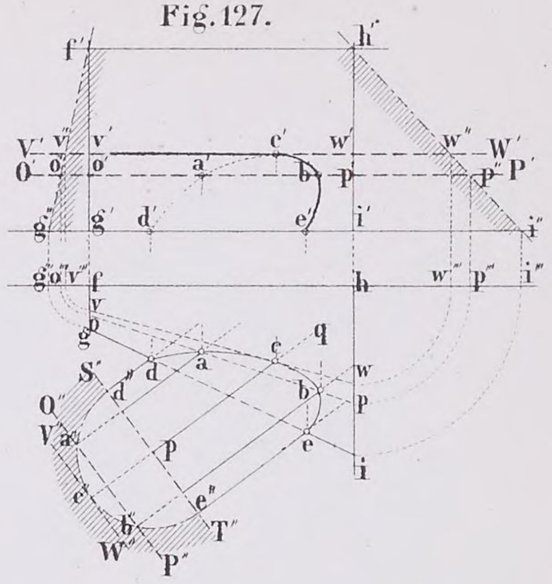


Fig. 128.

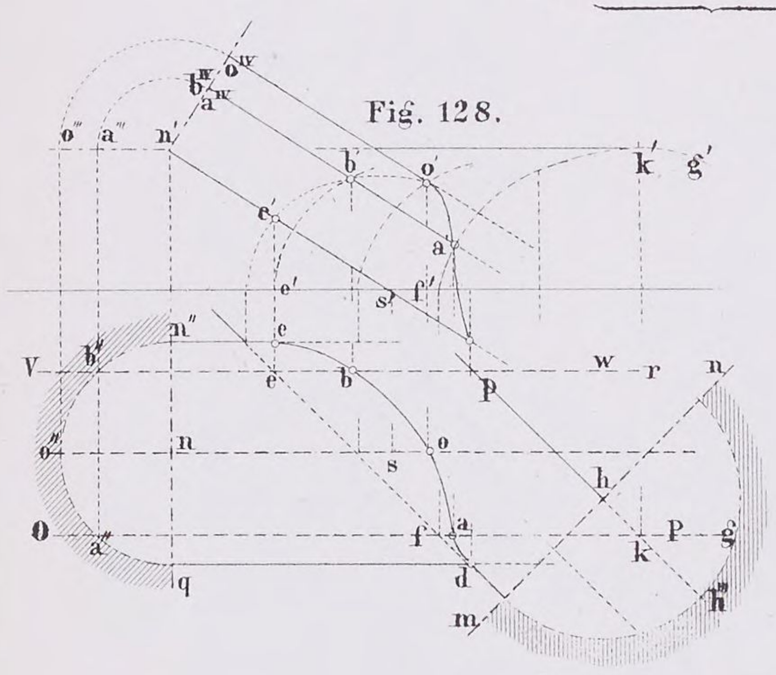


Fig. 129.

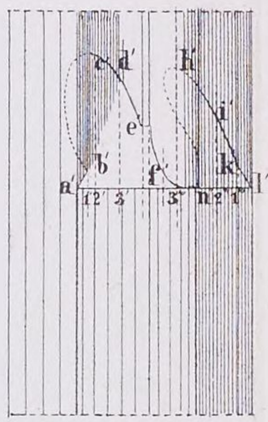


Fig. 130.

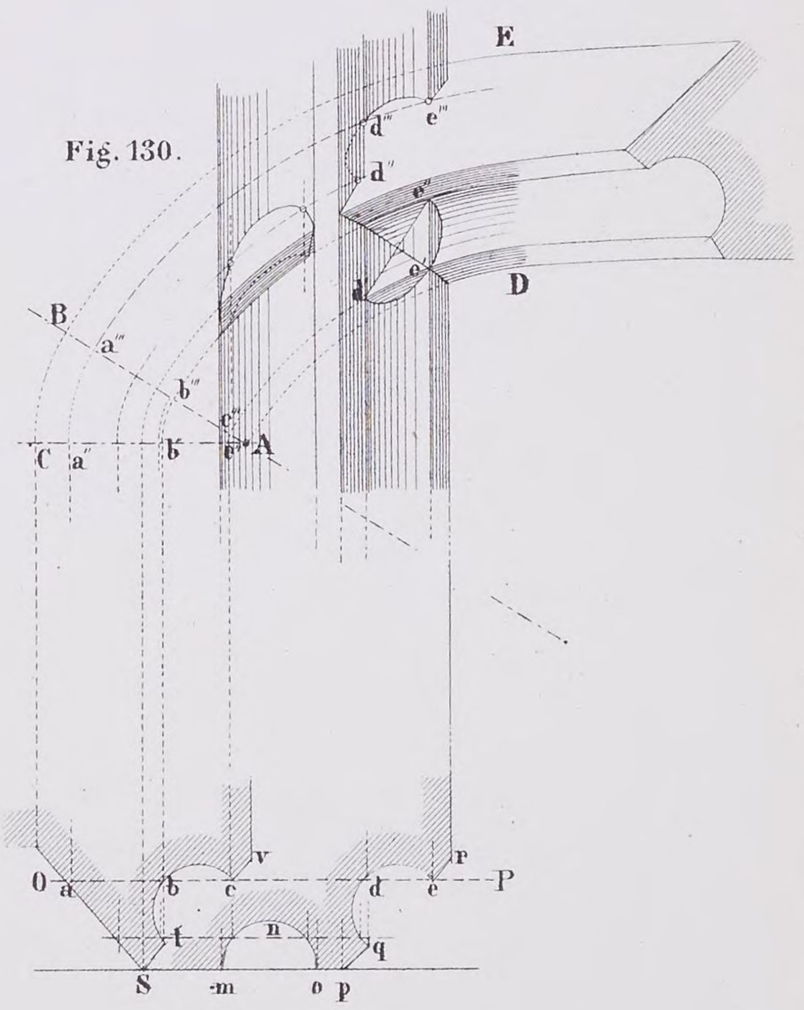


Fig. 131.

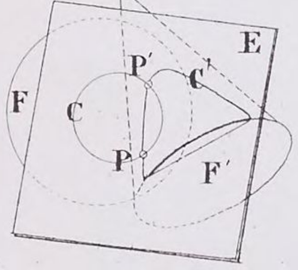
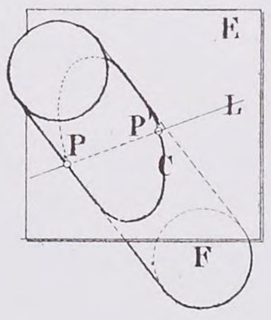


Fig. 132.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 133 a.

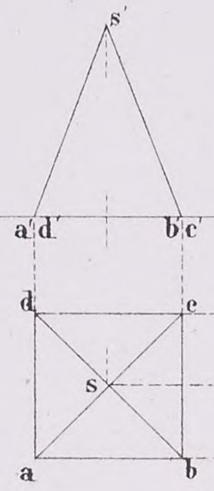


Fig. 133 b.

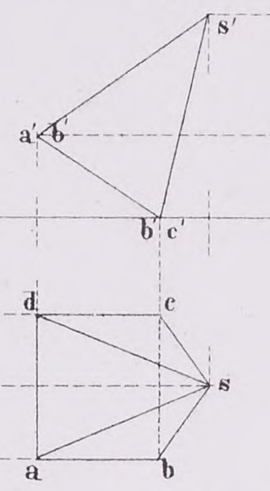


Fig. 133 c.

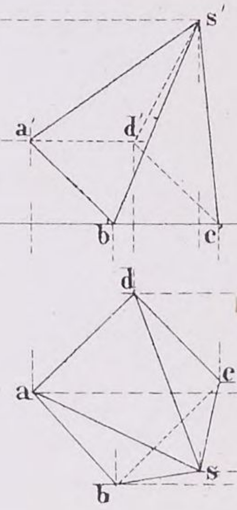


Fig. 133 d.

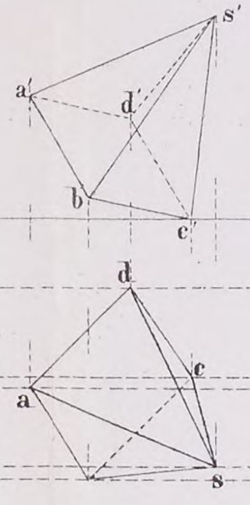


Fig. 133 e.

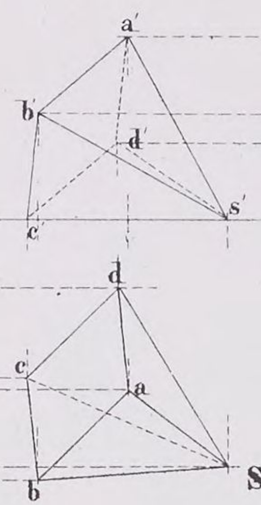


Fig. 133 f.

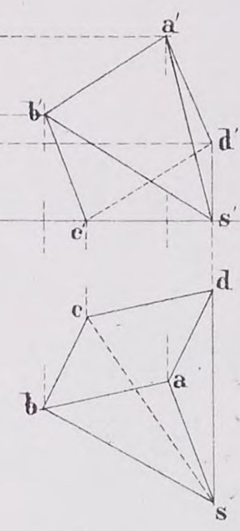


Fig. 134.

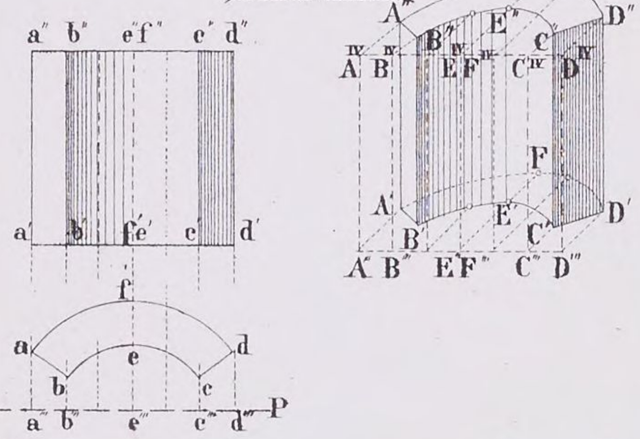


Fig. 135.

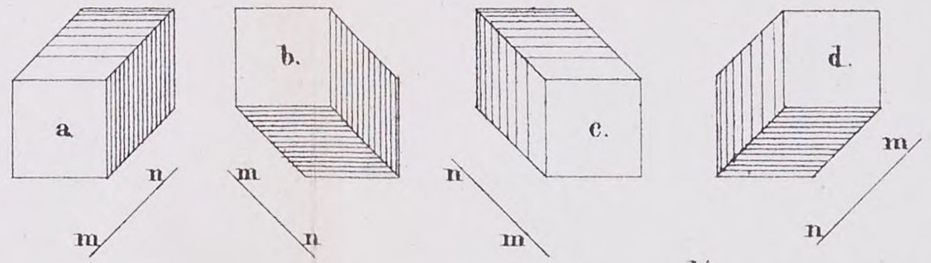


Fig. 136.

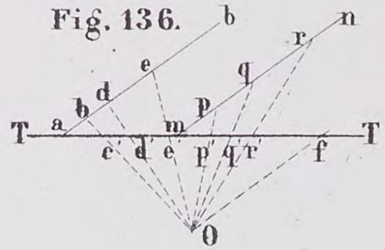


Fig. 140.

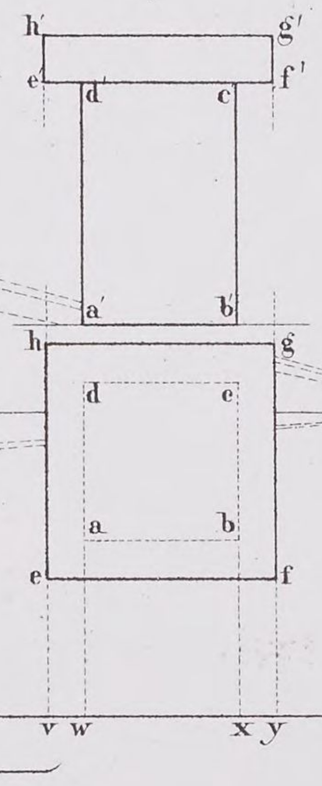


Fig. 137.

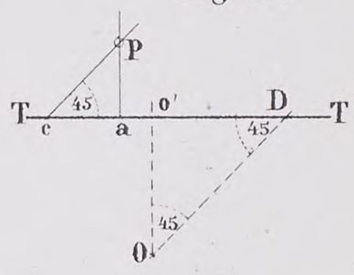
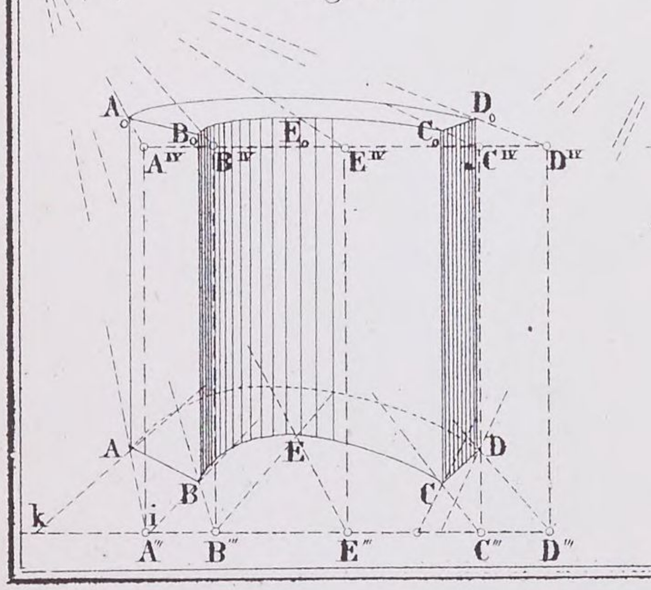


Fig. 139.



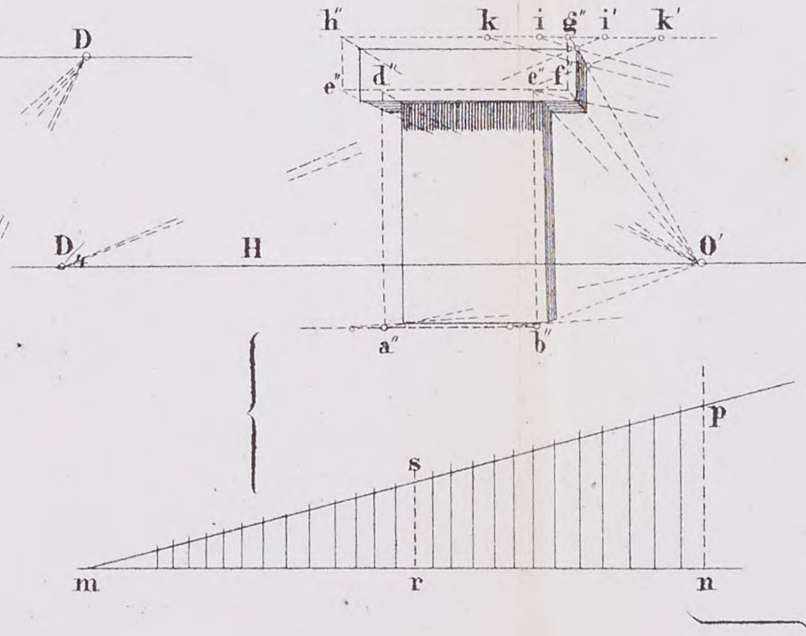
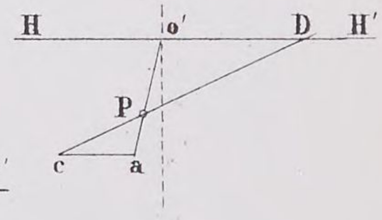


Fig 138.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart

Fig. 141.

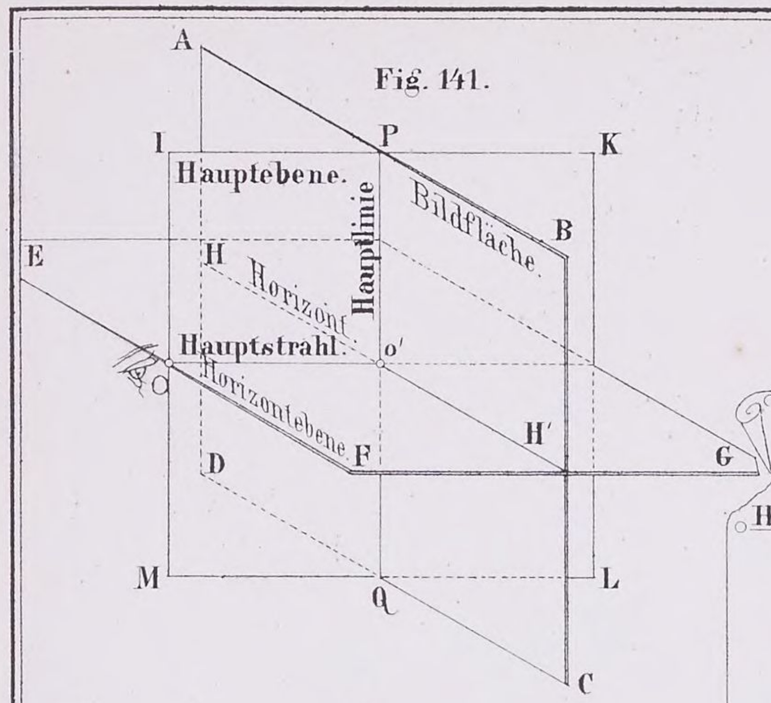


Fig. 142.

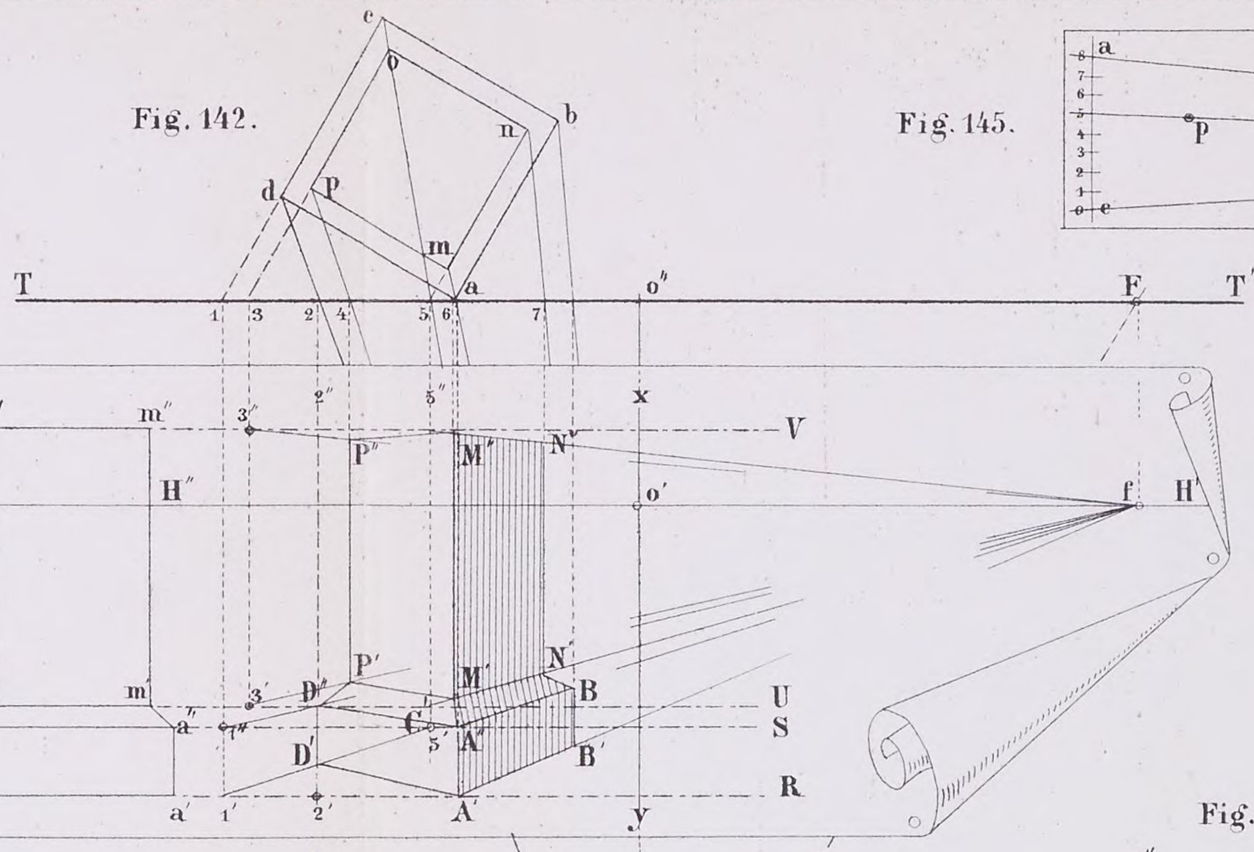


Fig. 145.

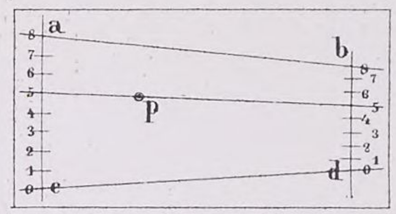


Fig. 149.

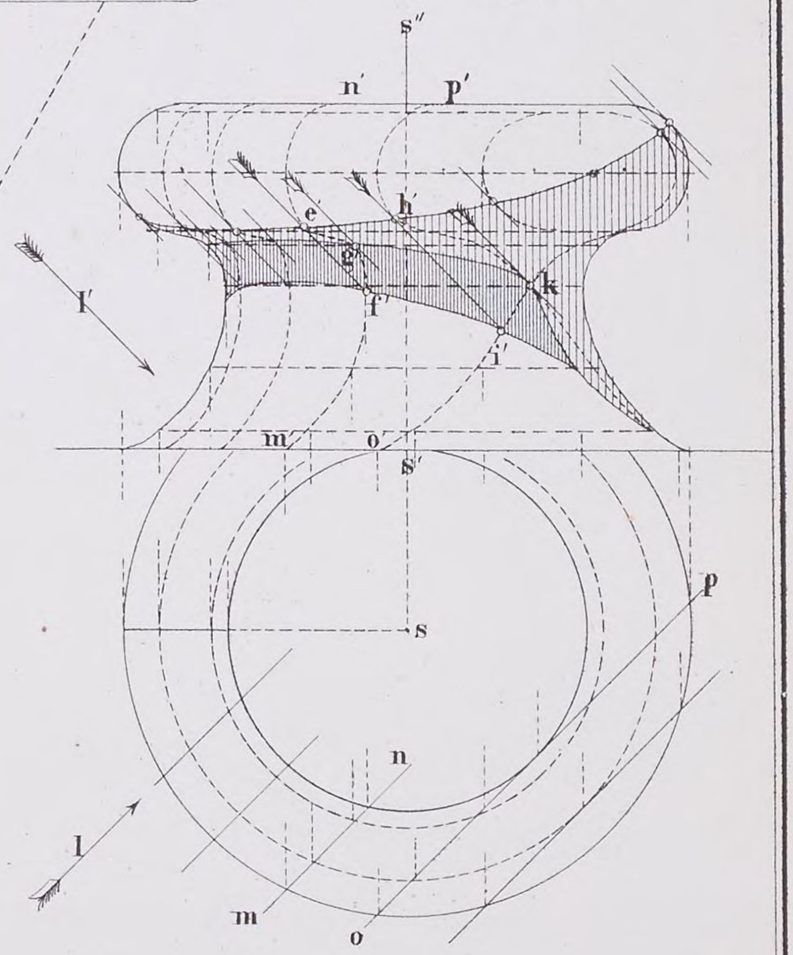


Fig. 143.

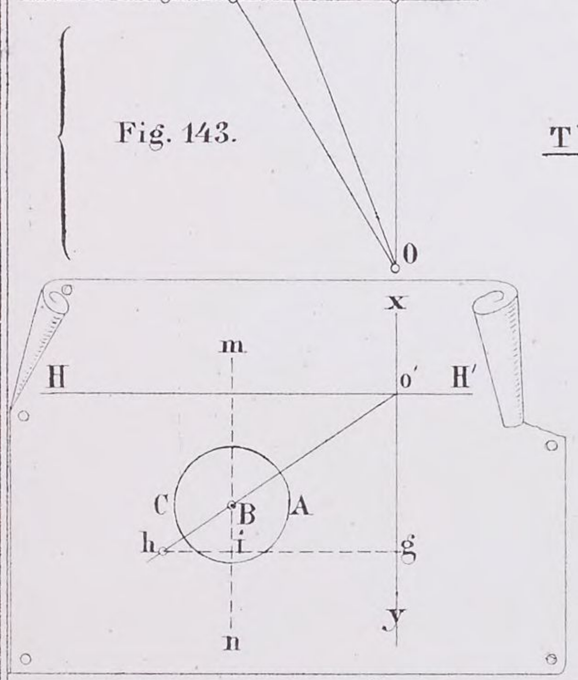


Fig. 144.

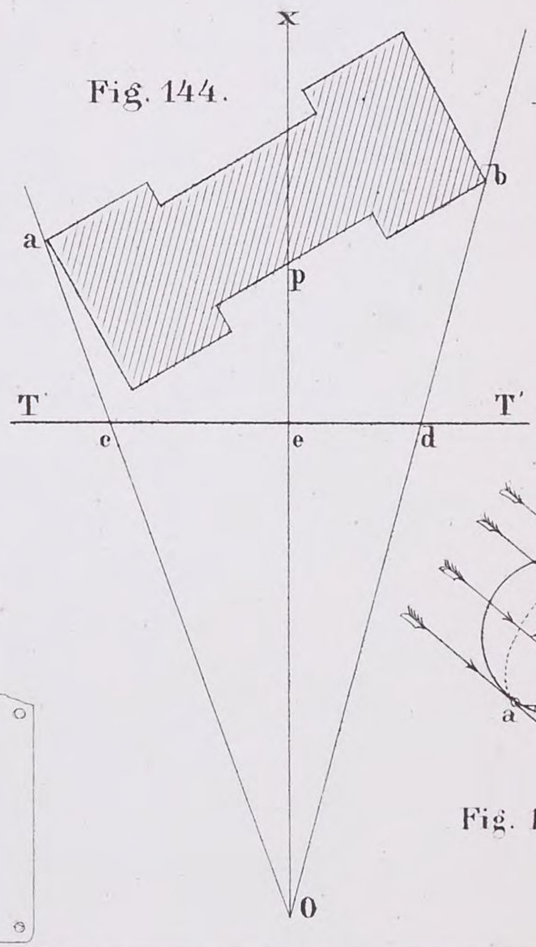


Fig. 147.

Fig. 146.

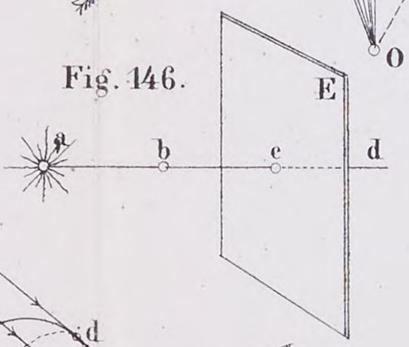
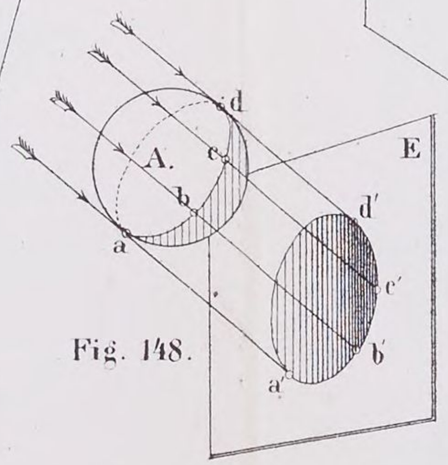


Fig. 148.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Fig. 150.

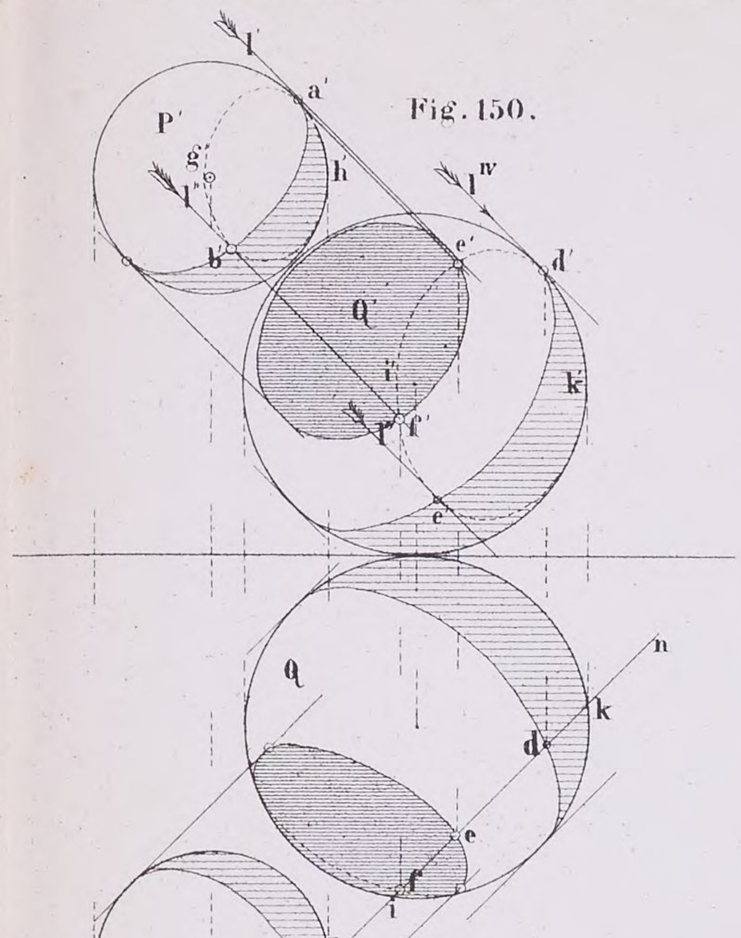


Fig. 151.

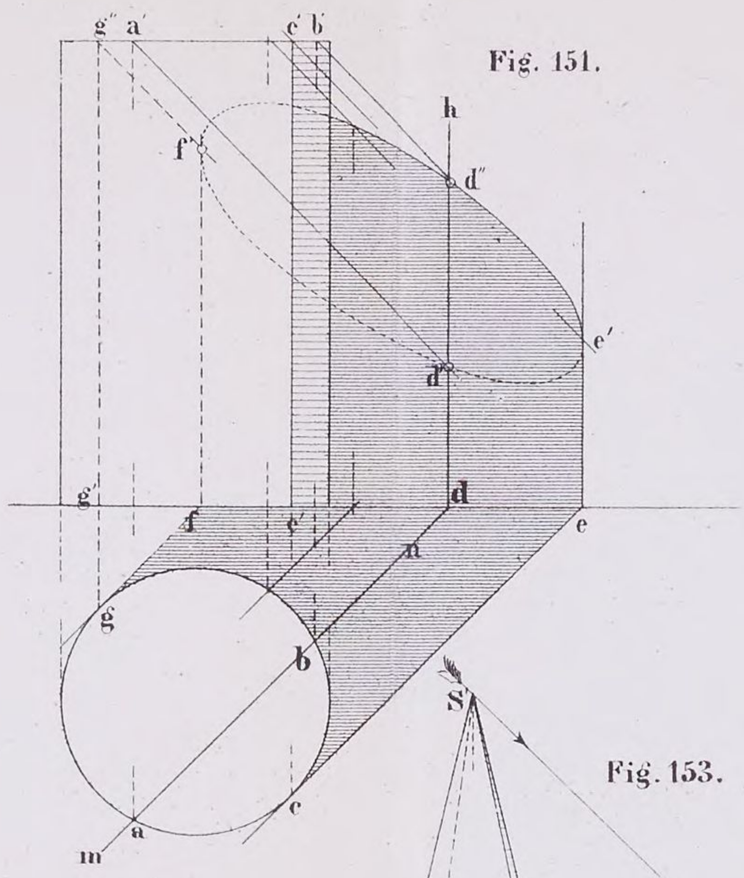


Fig. 152.

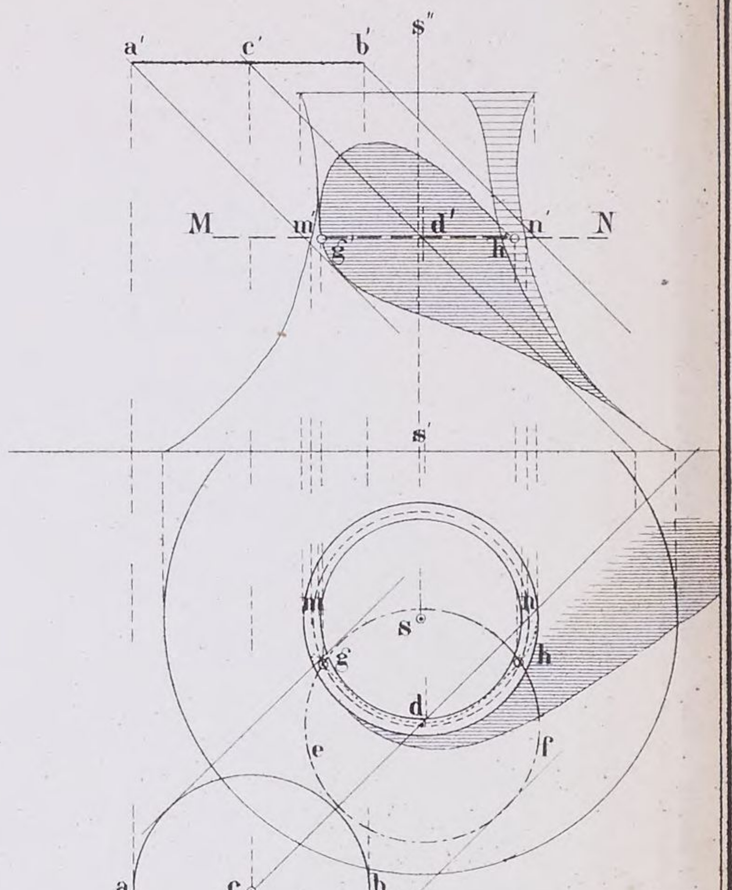


Fig. 153.

Fig. 155.

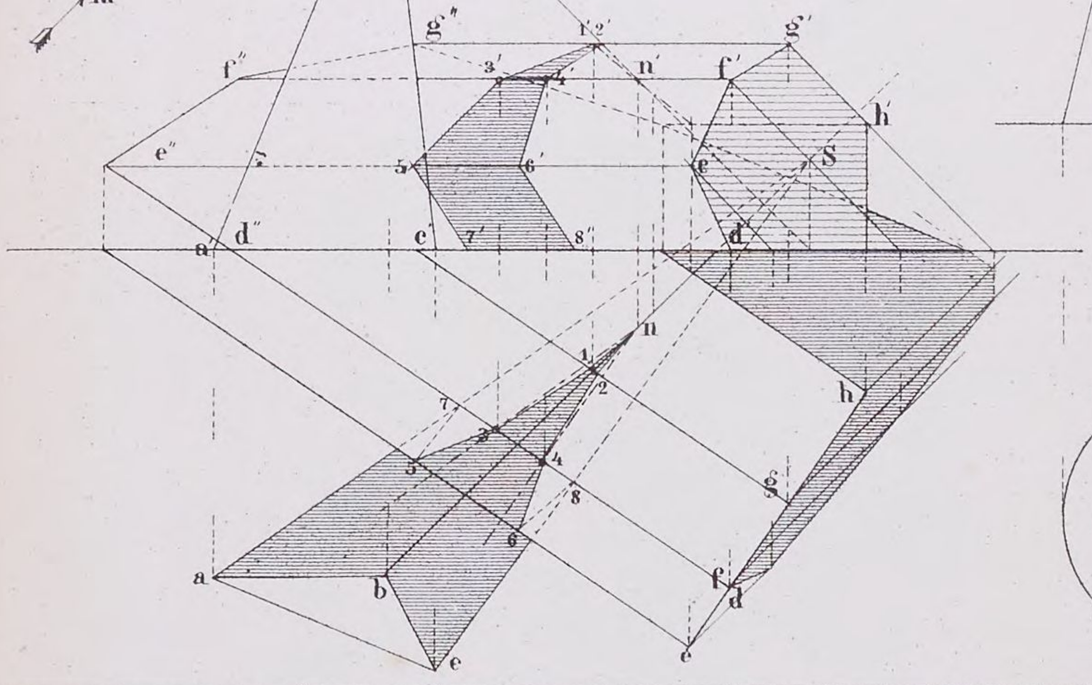
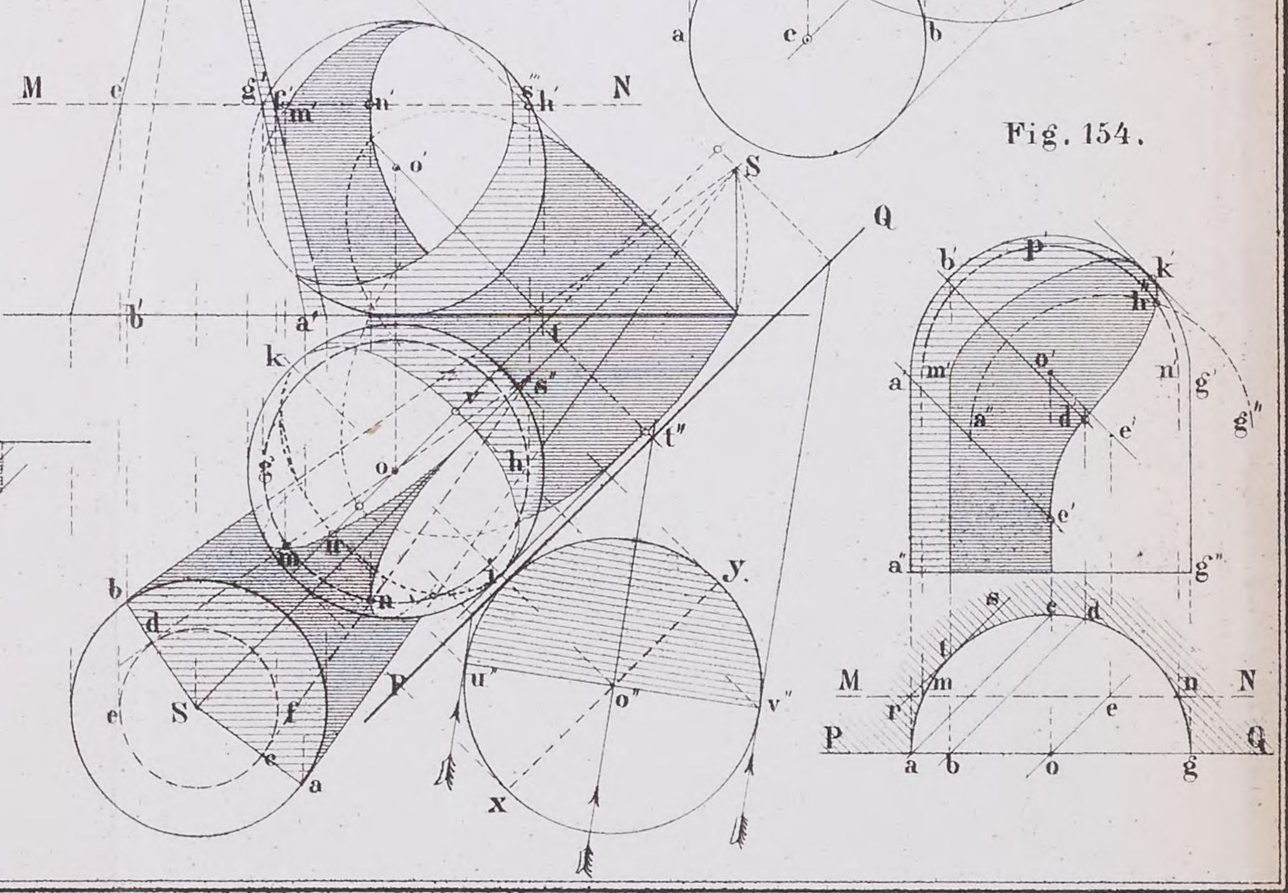


Fig. 154.



Art. Anst. v. E. Hochdanz, Stuttgart.

Staats bibliothek
Passau

Wünsch, J. L., die schriftl. Arbeiten des Gewerbsmannes. Für Gewerbtreibende u. gewerbl. Fortbildungsschulen. Zweite verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1862.

I. Abthlg: Geschäftsaufsätze u. Geschäftsbriefe. 54 kr. od. 16 Sg.

II. Abthlg: Die gewerbl. Buchführung u. die Lehre von d. Wechseln. 32 kr. od. 10 Sg.

Gantter, L., Schulgrammatik der engl. Sprache. Sechste verb. Aufl. gr. 8. 1868. (25½ Bog.) 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Gantter, L., Study and Recreation. **Englische Chrestomathie** für d. Schul- u. Privat-Unterr. In zwei Cursen. gr. 8.

I. Cursus. Zehnte Auflage. 1871. (20 Bog.) 1 fl. 12 kr. od. 24 Sg.

II. Cursus. Vierte Auflage. 1868. (29 Bog.) 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Gantter, L., Readings in Prose and Poetry. **Englisches Lesebuch** zum Zwecke der cursor. Lectüre für ob. Realclassen, Töchter- u. Fortbildgsschulen. gr. 8. 1867. 1 fl. 24 kr. od. 26 Sg.

Gantter, L., Collection of English Letters. Mustersammlung engl. Originalbriefe f. d. Schul- u. Privatgebrauch. gr. 8. 1856. (20 Bog.) 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

Gantter, L., Lessons of English Conversation. **Englische Sprechschule,** enth. Materialien zu logisch geordneten Sprechübungen im reinen engl. Idiom, für den Schul- und Privatgebrauch bearb. gr. 8. 1859. (26 Bog.) 1 fl. 24 kr. od. 26 Sg.

Reiff, Dr. J. F., **engl. Compositionsbuch,** enth. Uebungsstücke verschiedenster Stylformen, e. Abriß der engl. Syntax m. sprachgeschichtl. Noten u. synonym. Anhang. Für Real- u. gel. Schulen. gr. 8. 1867. 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

Robertson, J., Lehrbuch der englischen Sprache. Nach dem Französ. bearb. von **W. Delschläger.** In 2 Thln. gr. 8.

I. Theil. 6. Aufl. 1867. 36 kr. od. 10 Sg.

II. Th. 6. Aufl. 1868. 1 fl. 30 kr. 28 Sg.

Wiedmayer, D. W., Elementargrammatik d. engl. Sprache nach d. stufenweise fortschreitenden Methode. gr. 8. 1860. 36 kr. od. 12 Sg.

Wiedmayer, D. W., **Schulgrammatik** d. engl. Sprache. gr. 8. 1861. 1 fl. od. 18 Sg.

Otto, Dr. **E.,** neues **englisch-deutsches Gesprächbuch** z. Schul- u. Privatgebr. Zweite Aufl. 16. 1869. Cartonirt. 36 kr. od. 10 Sg.

Scott, Walter, The Lady of the Lake. A Poem. With Notes and a Glossary. 4. Edition. 16. 1871. 40 kr. od. 12 Sg.

Sheridan, dramatic works, edited by **L. Gantter.** 16. 1855. 54 kr. od. 15 Sg.

Seyerlen, J., Elementarbuch der französ. Sprache, nach Seidenstücker (Ahn)'schen Grundsätzen bearb. Elfte Aufl. gr. 8. 1871. (18 Bog.) 48 kr. od. 16 Sg.

Seyerlen, J., Zusammenhäng. **Uebungsstücke** z. Uebersetzen aus d. Deutschen in's Französische. Als Anhang zu seinem Elementarb. gr. 8. 1862. 16 kr. od. 6 Sg.

Seyerlen, J., Vorschule der französ. Sprache. M. besond. Rücksicht auf Beförderg d. formalen Bildungszwecke systemat. bearb. gr. 8. 1865. 1 fl. 12 kr. od. 22 Sg.

Seyerlen, J., Materialien z. Uebersetzen aus d. Deutschen in's Französische, mit e. Zusammenstellg sämmtlicher grammat. Regeln u. vollständ. Wörterverz., f. mittl. Classen. gr. 8. 1863. 1 fl. 30 kr. od. 28 Sg.

Gruner, Fr., Schulgrammatik d. französ. Sprache für Real- u. gelehrte Schulen. gr. 8. 1863. 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Gruner u. **Wildermuth, französ. Chrestomathie** f. Real- u. Gelehrten-Schulen.

I. Cursus, bearb. von **Fr. Gruner.** Neunte Aufl. gr. 8. 1868. (23 Bog.) 1 fl. 12 kr. od. 24 Sg.

II. Cursus, bearb. von Dr. **Wildermuth.** Vierte verb. Aufl. gr. 8. 1862. (33 Bog.) 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Eisenmann, Gruner und **Wildermuth, Deutsche Musterstücke** zur Uebung in der französ. (und engl.) Composition. gr. 8.

I. Abthlg von **Fr. Gruner.** Achte Aufl. 1871. 44 kr. od. 14 Sg. — Anmerkungen f. französ. Composition. Fünfte Aufl. 1870. 28 kr. od. 8 Sg. — Anmerkungen für engl. Compos. Dritte Aufl. 1867. 36 kr. oder 10 Sg.

II. Abthlg von **W. F. Eisenmann.** Zweite Aufl. 1865. 48 kr. od. 14 Sg. — Anmerkgn für französ. Composition. Zweite Aufl. 1865. 16 kr. od. 5 Sg.

III. Abthlg v. Dr. **Wildermuth.** Mit Anmerkgn für französ. Compos. 1854. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Französische Uebersetzg von Abth. I von Gérard, 3. Aufl. 1 fl. 36 kr. 1 Thlr., Abth. II von Borel 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr., Abth. III von Péschier 2 fl. 54 kr. oder 1 Thlr. 24 Sg. — **Englische** Uebersetzg d. Abth. I v. Thomas. Second edition. 1871. 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Reiff, Dr. **J. F., Elementar-Grammatik der französischen Sprache** m. zahlreichen Uebungsbeispielen f. Latein- u. Realschulen. gr. 8. 1868. 1 fl. 8 kr. od. 20 Sg.

Hölder, C. G., Handbuch der älteren u. neueren **französ. Litteratur,** m. biograph. Notizen u. Erläutergn. 4. Aufl. bearb. v. **O. Hölder.** gr. 8. 1865. 1 fl. 36 kr. 1 Thl.

Büchele, C., Leitfaden z. Unterricht in der franzöſ. Sprache, mit Materialien z. Ueberſetzen. Für Gewerbe- u. Fortbildgsſchulen. 8. 1863. 1 fl. 20 kr. od. 24 Sg.

Otto, Dr. E., neues franzöſiſch-deutſches Geſprächbuch z. Schul- u. Privatgebr. 8. Aufl. 16. 1870. Cart. 36 kr. od. 10 Sg.

Wolff, Charles, tableau synopt. des Conjugaisons françaises, conten. les verbes réguliers et l. verbes irrég. Quatrième Edit. augm. gr. 8. 1868. 10 kr. od. 3 Sg.

Hermann, Dr. H. A. u. J. G. Weckherlin, latein. Schulgrammatik für untere Gymnaſialclaſſen und höhere Bürger- u. Realſchulen. 4. verm. u. verb. Auflage. gr. 8. 1870. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Livius, Ausgewählte Stücke aus —, mit Anmerkgn z. Schulgebr. v. **Chr. Roller.** 8. 1861. 48 kr. od. 14 Sg.

Cicero, Ausgewählte Stücke aus —, in biograph. Folge, mit Anmerkgn z. Schulgebr. v. **W. Jordan.** 8. 1862. 56 kr. 16 Sg.

Holzer, G. L., Uebungsſtücke z. Ueberſetzen a. d. Deutſchen in's **Latein.** für d. mittl. Abthlgn der Gelehrtenſchulen, mit Anmerkgn, herausgeg. v. **C. Holzer.** gr. 8.
I. Abthlg. 7. Aufl. 1870. 52 kr. od. 16 Sg.
II. Abthlg. 6. Aufl. 1867. 52 kr. od. 16 Sg.

Forbiger, A., u. E. Kärcher, lateiniſch-deutſches u. deutſch-lateiniſches Handwörterbuch. In zwei Theilen. Lexikon-8. 3 fl. 9 kr. od. 1 Thlr. 24 Sg.

Deutſch-lateiniſcher Thl., v. A. Forbiger. Zweite, völlig umgearb. Aufl. 1856. (86 Bg.) 1 fl. 51 kr. od. 1 Thl. 1½ Sg.

Lateiniſch-deutſcher Thl., v. E. Kärcher. 1842. (60 B.) 1 fl. 18 kr. od. 22½ Sg.
Schulen erhalten je auf 6 Ex. ein ſiebentes als Frei-Exemplar.

Bäumlein, Wilh., griech. Schulgrammatik. Dritte verbeſſerte Aufl. gr. 8. 1865. 1 fl. 30 kr. od. 26 Sg.

Gaupp, W., u. C. Holzer, Materialien zur Einübung der **griech. Grammatik.** Dritte verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1869. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Bäumlein, W., C. Holzer u. J. Rieckher, Themata zur **griech. Compoſition** mit grammat. u. lexikal. Anmerkgn. für obere Claſſen. Zweite verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1866. 1 fl. 54 kr. od. 1 Thlr. 4 Sgr.
Dieſe Materialien u. Themata auch mit gemeinſch. Titeln: „Sammlg v. Aufgaben z. Ueberſetzen in's Griechiſche." I. und II. Theil.

Vorübungen zur griech. Chreſtom. u. d. T.
Schmid, K. A., Vorübungen z. Einleitg in die griech. Syntax. Dritte neubearb. Aufl. gr. 8. 1871. 16 kr. od. 5 Sg.

Metzger, L., u. K. A. Schmid, griech. Chreſtom. für d. mittleren Abthlgn der Gymnaſien in zwei Curſen m. erklär. Anm. u. e. Regiſter über dieſ. 3. neubearb. Aufl. gr. 8. 1871. 1 fl. 20 kr. od. 22½ Sgr.

— — **Wörterbuch** dazu. Dritte verb. Aufl. gr. 8. 1871. 48 kr. od. 15 Sgr.

Platons Gorgias, erklärt von **Heinr. Kratz.** 8. 1864. 1 fl. 6 kr. od. 20 Sg.

Maurer, F. J. B. D., hebr. u. chald. Wörterbuch üb. d. alte Teſtament, m. deutſchem Index, zunächſt f. Gymn. u. Lyceen. Lex.-8. 1851. 1 fl. 12 kr. od. 21 Sgr.

Regeln u. Wörterverzeichniß für die deutſche Rechtſchreibung. Zum Gebr. in den Württ. Schulanſtalten amtl. feſtgeſtellt. Sechste Auflage. gr. 8. 1871. 8 kr. od. 2½ Sg.
Partiepreis für Schulen bei mindeſtens 30 Exempl. 6 kr. od. 2 Sg. das Exempl.

Brandauer, J. F., deutſches Sprach- u. Leſebuch für die Elementarclaſſen der Gymnaſ. u. Realſchulen. Siebente verb. Aufl. gr. 8. 1871. 1 fl. od. 20 Sg.

Wagner, Karl, Deutſches **Leſebuch** für Bürger- u. Volksſchulen. Zweiundzwanzigſte verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1866. 36 kr. od. 12 Sg.

Nibelungenlied in d. älteſt. Geſtalt, Schulausgabe, herausgegeben m. Wörterb. v. **Ad. Holtzmann.** Zweite umgearb. Aufl. 8. 1863. 1 fl. 40 kr. od. 1 Thlr.

Beck, Joſ., philoſophiſche Propädeutik. Ein Leitfaden zu Vorträgen an höheren Lehranſtalten und zum Selbſtſtudium. Zwei Theile. 8.

I. Thl: **Empir. Pſychologie u. Logik.** Neunte durchgeſ. Aufl. 1869. 1 fl. 8 kr. od. 20 Sg.

II. Thl: **Encyclop. der Philoſophie.** Vierte neu bearb. Aufl. 8. 1869. 1 fl. 30 kr. od. 26 Sg.

Beck, Carl, das **Chriſtenthum** nach Geſchichte u. Lehre. Lehrbuch f. d. ev. Religionsunterr. an Gelehrten- u. höheren Gewerbeſch., zugl. Handb. f. Gebildete. Zweite verm. Aufl. gr. 8. 1864.

I. Theil. Die chriſtliche **Geſchichte.** 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

II. Thl. Die chriſtl. **Lehre.** 44 kr. 14 Sg.

Holl, C., die Erdbeſchreibung, in zwei Lehrſtuf. f. d. Schule bearb. Fünfte Aufl. gr. 8. 1871. Geh. 36 kr. od. 12 Sg.

Holl, C., Land und Volk Iſrael für Schule u. Haus. 1869. gr. 8. (8½ Bog.) Mit einem Grundriß des herodi[ä]ſchen Tempels. Geh. 28 kr. od. 8 Sg.

J. B. Metzler'ſche Buchhandlung in Stuttgart.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rieß, Karl,

Grundzüge der darstellenden Geometrie nebst e. Anh., enthaltend: d. Anwendung derselben auf Perspektive u. Schlagschattenconstruktion ; zum Selbststudium, sowie als Leitfaden beim Unterricht in Baugewerkeschulen, Fortbildungsschulen, Oberrealschulen, höheren Bürgerschulen &c

Stuttgart 1871

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 61
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346060-9